

L. eleg. g.

184

i

L. eleg. g. 184^L

Helwig

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

1897

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

1897



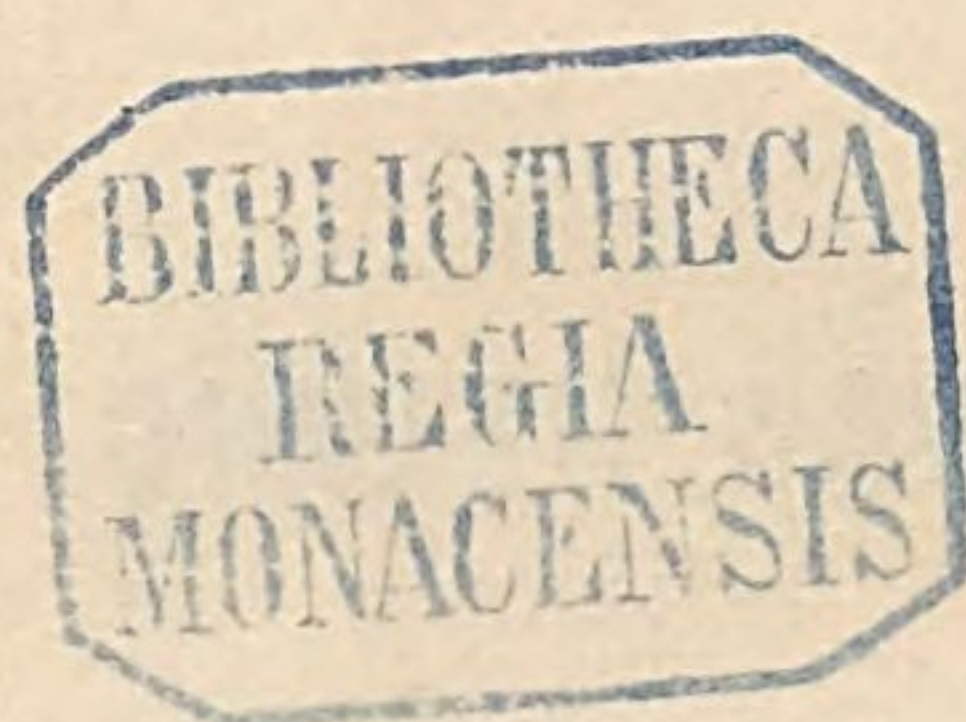
‘EINE
THEORIE DES SCHÖNEN

MATHEMATISCH-PSYCHOLOGISCHE STUDIE

VON

PAUL IWAN HELWIG

AMSTERDAM
DELSMAN & NOLTHENIUS
AKADEMISCHE BUCHHANDLUNG
1897.



MEINER LIEBEN FREUNDIN

FRÄULEIN

ZAHNÄRZTIN ADELAÏDE HERCKENRATH

IN BEWUNDERUNG DARGEBRACHT.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILL.

INHALT.

	Seite
Vorwort	VII
Erstes Buch. Entwicklung der Theorie im Allgemeinen.	
§ 1. Die Aufgabe	1
2—4. Ein Schönheitsurtheil ist eine Wahl aus subjectiven Quantitäten	1—2
5. Ableitung des Schönheitsgesetzes	3
6. Nähere Präcision des Gesetzes	4
7. Auseinandersetzung des Standpunktes	5
8. Die Theorie erklärt das Frappiren des Schönen . .	6
9. Beziehung der Lust- und Unlustgefühle zu den Schönheitsurtheilen	7
10—12. Die Theorie erklärt die Abweichungen im ästhetischen Geschmacke	8—10
13. Das Uebermässige	13
14. Schluss des ersten Buches	14
Zweites Buch. Wissenschaftliche Entwicklung der Theorie.	
I. Theil: Vom ästhetischen Maximum.	
15. Mathematische Mittelwerthe	15
16—18. Bestimmung der Art des ästhetischen Mittelwerthes	16—18
19—20. Ableitung der Grundformeln	20—25
21. Ableitung der Principien der Symmetrie und Asym- metrie	26
22—24. Einführung von Correctionen	28—29
25. Kritik der goldnen Schnitt-Theilung	30
26. Das Princip der ästhetischen Gleichwerthigkeit . .	33
27—28. Die Brauchbarkeit der ästhetischen Versuchs- methoden	35—39
29—32. Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen aus Fechner's Versuchen	39—45
33—35. Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen aus Witmer's Versuchen	45—49
36. Unbrauchbarkeit einiger Versuche zur theoretischen Vergleichung	49
37. Der Mechanismus der psychischen Mittelwerths- bildung	49
38. Die psychische unabhängige Variabele	52

II. Theil: Vom ästhetischen Modulus.

	Seite
§ 39—40. Experimentelle Wohlgefälligkeitscurven	53—58
41—42. Theoretische Bestimmung der Wohlgefälligkeits- curven. Zweite Hypothese der Theorie	58—62
43—44. Vergleichung der theoretischen Wohlgefälligkeits- curven mit den experimentellen	62—65
45. Wohlgefälligkeitscurve bei der Symmetrie	65
46. Wohlgefälligkeitsvertheilung bei der discontinuen Mittelwerthsbildung	66
47—49. Beziehung der Wohlgefälligkeit zur Wahrschein- lichkeit ästhetischer Fehler	67—71
50—52. Combinatorische Schönheit. Wohlgefälligkeitsfläche	71—77

III. Theil: Von der Aenderung der Schönheitsideale.

53. Einfluss der Wiederholung auf dem Mittelwerthe	78
54. Das Princip der Periodicität der Schönheitsideale	82
55. Schluss der Abhandlung	85
Tabelle der Functionen $\log x^x$ und x^x für $0 < x < 1$	86—87

VORWORT.

In dieser Abhandlung habe ich versucht, meine Gedanken über das Wesen des Schönen, sowie sie allmählich zu einem Ganzen sich ausgebildet haben, niederzuschreiben. Auf Vollständigkeit mache ich keine Ansprüche: ich habe nur Ursprüngliches mittheilen wollen.

Zu gleicher Zeit erscheint auch eine Abhandlung von Herrn C. R. C. Herckenrath über das Schöne. Als wir vorher bemerkten, dass wir, Jeder für sich, zu denselben Grundgedanken gelangt waren, sind wir übereingekommen, auch selbständig, Jeder nach seiner Art, die Theorie auszuarbeiten, damit die Ursprünglichkeit beibehalten bliebe.

Für meine Abhandlung habe ich gemeint, statt meiner Muttersprache die deutsche Sprache anwenden zu müssen, um eine allgemeinere Kritik zu erlangen.

Amsterdam, October 1896.

P. I. Helwig.

Erstes Buch.

Entwicklung der Theorie im Allgemeinen.

§ 1. Das Wesen und die Eigenschaften des Schönen herauszufinden, ist die Aufgabe dieser Untersuchung. Eine solche kann im strengsten Verstande nur eine rein individuelle sein, weil das Schöne Einem erst zu existiren anfängt, sobald er es fühlt, und zwar so wie es ihm speciell gegenüber erscheint.

Die Erfahrung eines jeden Tages lehrt uns aber zu glauben, dass die Gefühle Anderer nicht in jeder Hinsicht verschieden sind; die volle Gewissheit können wir aber davon nicht haben. Wenn wir also fernerhin von einem Schönheitsgefühl als allgemein menschlicher Besitz reden werden, so thun wir es hypothetisch und damit wir bei den Lesern eine Selbstbeobachtung hervorrufen. Diese Abhandlung ist in zwei Theile getheilt; im ersten wird die Theorie gemeinverständlich auseinander gesetzt, im zweiten werden wir sie an den Experimenten wissenschaftlich prüfen.

§ 2. Das Schöne kann sich auf zwei Weisen offenbaren. Entweder frappirt es den Menschen, das heisst von aussen her wird ihm ein Schönheitsurtheil abgezwungen; oder man will ein Schönheitsurtheil aussprechen und sucht also selber das Schöne auf. In beiden Fällen wird gewählt. Frappirt uns das Schöne, so wählen wir direct und ohne Absicht, im anderen Falle nehmen wir uns vor, zu wählen. Die Wahl ertheilt dem einen Dinge einen höheren Werth als dem anderen und das erste wird dann schöner als das zweite genannt.

Woraus aber wird bei Schönheitsbestimmungen gewählt? Scheinbar aus den verschiedenen Qualitäten der Dinge. Man bevorzugt eine Rose um ihre Farbe oder weil ihre Form am meisten gefällt. Nennt man Farbe und Form die Qualitäten der Rose, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass doch nur quantitative Verschiedenheiten der Grund der Wahl waren. Man wählte die Rose nicht, weil sie die Qualität »roth« hatte, sondern weil sie im bestimmten Maasse roth war. Man bevorzugte sie nicht um ihre Form als Qualität, welche sie gemein hat mit aller Materie, sondern um ihre Form, sowie sie der Quantität nach war, also um ihre bestimmte Form.

§ 3. Wählt also unbedingt das Schönheitsgefühl aus Quantitäten, umgekehrt dürfen wir nicht jede Wahl aus Quantitäten als ein Schönheitsurtheil betrachten. Eine der äusserlichen Quantitäten, wonach eine Farbe z. B. bestimmt wird, ist die Wellenlänge des Aethers; aber innerlich bemerken wir von dieser Wellenlänge keine Spur: wir empfinden nur dasjenige, was wir »Farbe« nennen. Zugleich wissen wir, dass es verschiedene Farbenarten mit allen ihren Uebergängen und Abstufungen gibt.

Die innerlichen Formen der äusserlichen Quantitäten sind aber die subjectiven Symbole dieser äusserlichen Quantitäten. So ist ein Ton die subjective Bestimmung der Schwingungszeit einer Luftschwingung in der Symbolengestalt, welche der Geist den von Aussen her übermittelten Schwingungszahlen bei Gehörsempfindungen geben muss. Als Quantitäten fühlen wir die Empfindungen nicht, sondern als subjective Symbole von Quantitäten. Mit diesen subjectiven Symbolen: Farben, Töne, Formen, Helligkeiten, Geschmacken, Duften u. s. w. arbeitet unser Geist, und da wir sagten, dass unser Schönheitsgefühl aus Quantitäten wählt, so hätten wir diese Einschränkung hinzufügen sollen: so weit und so wie diese Quantitäten in ihrem subjectiven Kleide sich uns offenbaren.

§ 4. Jede Wahl, welche auch, setzt eine Regel, ein Gesetz voraus, wonach gewählt wird. Der Vorrang, welcher durch das Wählen hervorgerufen ist, wird durch diese Regel

verursacht. Ein Schönheitsurtheil als Wahl aus subjectiven Quantitäten gründet sich demzufolge auch auf einer Regel. Behauptet man, dass diese Regel die Schönheit selber ist, so sagt man also: Etwas ist schöner, je nachdem es schöner ist. Derartige Identitäten lehren uns nichts.

Obgleich ich vorsätzlich die Aeusserungen Anderer über das Wesen der Schönheit, so weit sie nicht experimentell bestätigt sind, hier nicht erwähne, weil ich hier nur streng wissenschaftlich die Sache untersuchen will, so ist es doch vielleicht nicht überflüssig, zu sagen, dass alle Erklärungen über das Wesen der Schönheit und alle Definitionen, welche man fehlerhaft von einer Sache geben wollte, die schon lange bekannt war und deshalb eine *Introductio per definitionem* völlig entbehren könnte, auch im Grunde nichts Anderes sind, als mehr oder weniger zutreffende Regeln, welche die Wahl des Schönheitsgefühles erklären sollten.

§ 5. Wir werden versuchen, selbständig die Schönheitsregel zu entdecken. Wir fragen dann: In welchem Falle finden wir etwas nicht schön und wie begründen wir es? Einer findet einen Roman unschön, er ist zu umständlich. Ein Anderer beurtheilt einen Blumenstrauss und findet ihn allzu aufgeschmückt. Wir würden eine Menge Urtheile von unschön oder hässlich anführen können; ein Jeder aber hat selbst über Tausende ausgesprochen. Sie stimmen aber Alle in Einem sehr merkwürdig überein: immer motivirt man das Unschöne durch die Aufzählung von all demjenigen, was man als »Zuviel« oder »Zuwenig« im beurtheilten Dinge anwesend zu sehen meint.

So schwierig es oft ist, zu bestimmen, warum wir etwas schön finden, so leicht ist es meistentheils, zu motiviren, weshalb wir etwas hässlich nennen. Dies ist nicht unnatürlich, denn die Meinung, dass wir ein Ding hässlich finden, kann schon motivirt werden durch die Aussage, dass Dies oder Das zuviel anwesend ist, aber grade wenn wir es schön finden, ist kein Zuviel oder Zuwenig mehr da und wir können nichts sagen. Wir fühlen, dass es schön ist und zugleich, dass wir nichts darauf zu sagen haben.

Ausserdem würde es sehr schwierig sein, wenn wir etwas Hässliches ausbessern wollten, bis wir es schön finden, um

genau das Maass dieses Zuviel oder Zuwenig zu bestimmen. Wir können es nicht oder vielleicht erst, nachdem wir zahlreiche Versuche gemacht haben. Obwohl es uns denn auch meistens unmöglich ist, die Quantitäten des Zuviels oder Zuwenigs in dem Hässlichen genau anzugeben, sind sie doch da und sind die Ursachen des Hässlichen.

Wird also das Unschöne gekennzeichnet durch ein subjectives Zuviel oder Zuwenig, das Schöne hat dann das Merkmal des subjectiven Normalen, wie schwierig es sein möge, es quantitativ zu bestimmen. Wir nannten es subjectiv, weil dieses Normale nur im beurtheilenden Menschen anwesend ist; ein Anderer hat andere Meinungen von dem Normalen.

§ 6. Wir wollen aber versuchen, ein vorstellbares Bild von dem geistigen Processe, was sich bei jedem Schönheitssurtheile abspielt, zu bekommen. Dabei können wir uns fragen, was denn eigentlich für jeden Menschen mit dem subjectiven Normalen gemeint sei. Woher kommt es, dass der Mensch die Dinge der Aussenwelt classificirt nicht nur nach ihren äusseren Merkmalen, sondern auch nach einem subjectiven Theilungsprincipe in normale und abnormale Dinge und Erscheinungen? Warum hat für uns ein Zwerg eine abnormale Körperlänge? Warum nennen wir es abnormal, wenn Einer sechs Finger an der rechten oder linken Hand hat? Weil der Durchschnittsmensch nicht so klein ist und fünf Finger an jeder Hand hat. Der Durchschnittsmensch ist ein Mittelwerth aus allen Menschen, die man gesehen hat.

Was wir also »normal« nennen, ist nichts Anderes als: »übereinstimmend mit dem Mittelwerthe des beurtheilten Dinges«. Das subjectiv Normale ist dasjenige, was ein Subject, ein fühlender Mensch, als Durchschnittliches, als Mittelwerth betrachtet.

Der Mensch bildet dieses Normale aus den verschiedenen Formen, in denen die Dinge und Zustände sich ihm offenbaren. Er fühlt, dass der Mittelwerth einer Reihe gleichartiger Empfindungen die charakteristischen Merkmale dieser Reihe in sich einigt und die nichtcharakteristischen, die accidentellen, bei Seite lässt oder verdunkelt. Kein Zuviel oder Zuwenig ist im

Mittelwerthe da, es repräsentirt am besten den Typus des Dinges, es ist der Maassgeber des Normalen, des Schönen.

§ 7. Wir beschränken uns im ersten Theile dieser Abhandlung auf die Entwicklung der Theorie, so weit dies ohne Hilfe der Mathematik stattfinden kann, und haben jetzt schon die theoretische Haltestelle erreicht, wo unsere Denkmachine nothwendig für die weitere Fahrt die Energie der mathematischen Formeln nicht mehr entbehren kann. Einige unserer Mitreisenden werden hier aussteigen müssen, und es dünkt uns deshalb besser, unseren Aufenthalt hier zu benutzen, um, so weit wie möglich, den Werth unserer erreichten Stelle zu zeigen.

Dass wir mit der Anwendung der Mathematik noch viel weiter kommen können, leuchtet jetzt schon ein, wenn man sich erinnert, dass ein Schönheitsurtheil immer eine quantitative Aussage ist und dass die wahre Art der Mittelwerthsbildung mathematisch bestimmbar sein muss.

Auf unserem jetzigen Standpunkte denken wir uns deshalb, dass ein jeder Mensch aus den Dingen seiner Erfahrung, welche er im Gedächtnisse aufbewahrt, unbewusst Mittelwerthe, Mittelformen bildet. Von allen Antlitzen z. B., welche er einst gesehen hat, besteht im Gedächtnisse das Erinnerungsbild. Vielleicht hat ein Mensch vor seinem 30. Lebensjahre wohl einige tausend Antlitze gesehen. Kann er sie sich alle nicht wieder einzeln ins Bewusstsein zurückrufen, dieses schadet der Thatsache nicht, dass er sie gesehen hat und dass sein unbewusstes Gedächtnissmagazin sie aufbewahrt, vielleicht um sie nie wieder aus der dunklen Nacht des Unbewussten ins Tageslicht des Bewusstseins zurück zu führen. Wir behaupten, dass im Menschen aus diesem Gedächtnissmaterial unbewusst Mittelwerthe gebildet sind, im genannten Beispiele den Typus »Antlitz« repräsentirend für den betreffenden Menschen.

Weiter behaupten wir, dass diese unbewussten Mittelformen, aus gleichartigen Dingen aufgebaut, das subjectiv Normale vergegenwärtigen, womit jedesmal ein gesehenes Ding zu seiner Schönheitsbestimmung verglichen wird. Obwohl diese Mittelwerthe unbewusst sind, treten doch die

bewussten Empfindungen mit ihnen in eine Art Uebereinstimmung, wodurch die Vergleichung ermöglicht wird. Je nachdem also ein nach seiner Schönheit beurtheiltes Ding besser übereinstimmt mit dem Mittelwerthe dieses Dinges, welcher im beurtheilenden Menschen sich vorfindet, wird es auch um so schöner gefunden. Wir müssen uns mit dieser Errungenschaft zufrieden stellen. Wie die Mittelwerthsbildung mathematisch vor sich geht, kann später mit genügender Genauigkeit gezeigt werden, aber wie sie im Gehirn unbewusst mechanisch abläuft, sind wir noch nicht im Stande aufzuklären. Vorläufig denke ich mir den Process als eine Art Superposition, um doch wenigstens etwas Greifbares zu denken und ohne jeden Anspruch auf Exactheit. Der tiefere Mechanismus unseres Geistes bleibt dennoch unaufgeklärt, obwohl unbedingt eine Aussicht auf eine Aufklärung durch unsere späteren mathematischen Untersuchungen geöffnet wird.

§ 8. Wir sind nun im Stande, einzusehen, woher es kommt, dass die Schönheit eines Menschen, eines Dinges uns frappiren kann. Im Augenblicke, wo das gesehene Bild angeschaut wird, tritt es in Relation mit der anwesenden unbewussten Mittelform dieses Bildes und fällt damit hauptsächlich oder vielleicht ganz zusammen. Was uns frappirt, ist die scheinbar sonderbare Thatsache, dass etwas Neues, das wir vielleicht nie zuvor gesehen, uns so bekannt und gemeinsam scheint. Es ist das Zusammenfallen der äusserlichen Erscheinung mit dem unbewussten innerlichen Mittelwerthe, der aus anderen gleichartigen Erscheinungen gebildet wurde.

Fehlerhaft ist die Meinung, dass das Frappiren des Schönen im Neuen der Erscheinung sich gründet, denn sobald keine Mittelform des Dinges da ist, weil vorhergegangene Erfahrungen es nicht lieferten, tritt das Gefühl des Aengstlichen und Hässlichen hervor. Die Angstgefühle wilder, farbiger Völker, wenn sie zum ersten Male einen Weissen sehen, beweisen dies genügend. Ein weisser Mensch war ihnen noch unbekannt geblieben, sie haben noch keinen Mittelwerth von ihm und finden ihn denn auch schauderhaft hässlich.

Das Nämliche trifft bei einer neuen exorbitanten Modenart zu. Nach dem ersten Eindrucke dünkt uns die neue Mode hässlich und lächerlich, wir sehen sie aber immer mehr herrschen, die Mittelform eines Costüms ändert sich entsprechend nach der Seite des anwesenden Excesses, und einmal im Besitze dieses Mittelwerthes, finden wir jetzt ein Costüm, befreit von der Extravaganz, eher altmodisch und hässlich. Gleichwie beim Schönen, so kann auch das Hässliche uns frappiren. Wir erschrecken vor so einer enormen Abweichung von demjenigen, was wir als Normalform kennen. Bei der Begegnung von Menschen mit einer Nasenverstümmelung fühlen wir dies sehr lebhaft.

§ 9. Aus diesen Beispielen tritt zugleich die Thatsache hervor, dass ein jedes Schönheitsurtheil von einem bestimmten Lust- oder Unlustgefühle begleitet sein kann. Wir werden diese Thatsache etwas näher betrachten, weil man hierbei oft fehlerhafte Schlüsse zieht. Von vornherein ist es gar nicht nothwendig, dass ein Ding, was wir schön finden, auch zugleich ein Lustgefühl wach ruft, oder dass wir von dem Schönen geniessen. Oft selbst geniessen wir gar nicht mehr von dem Schönen, obwohl wir doch nicht sagen können, dass die Schönheit sich änderte. Ebenso schreckt das Hässliche uns nicht immer ab, oft bleiben wir darum indifferent, ja, in unseren Tagen, am »fin de siècle« fühlen Einige selbst Lustgefühle bei der Anschauung des Hässlichen, auch wenn sie des Hässlichen bewusst sind.

Ein Lustgefühl kann, aber darf nicht nothwendig ein Schönheitsurtheil begleiten. Ebenso wenig soll man ein jedes Lustgefühl als ein ästhetisches betrachten. Das Schöne ist meistens auch angenehm, aber gar nicht alles Angenehme ist zugleich schön. Derartigen Verwirrungen begegnet man oft und schon bei der Erziehung von Kindern.

Es ist nicht Sache dieser Theorie, Erläuterungen über das Wesen der Lust- und Unlustgefühle zu geben, aber wir können doch nicht umhin, einige Andeutungen zur richtigen Auffassung dieser Theorie einzutragen.

Vor Allem soll man nicht ausser Acht lassen, dass dasjenige, was uns in dem Schönen anzieht, ausschliesslich von dem begleitenden Lustgefühle her stammt. Oder so ausge-

sprochen: Das Schöne qua tale interessirt den Menschen nicht, sondern der Reiz des Schönen. Wenn wir tausend schöne Dinge sehen, ohne den Reiz ihrer Schönheit zu fühlen, so interessiren wir uns gar nicht dafür. Im normalen Zustande ist der Reiz des Schönen, das Lustgefühl, stetig verbunden mit dem blossen Schönheitsurtheile, und wir erklären uns dies derart, dass der Mensch im normalen Zustande auch am besten auf den Mittelwerthen der Dinge und Erscheinungen berechnet ist. Sie standen in ihrer relativen Constanz als Mittelwerthe dem Körper bildend gegenüber und seinerseits hat auch unser Körper sich ihnen am besten angepasst. Es leuchtet so ein, wie normaliter mit den Mittelwerthen der Empfindungen, also mit dem Schönsten, auch das höchste Lustgefühl wachgerufen werden kann, und es erklärt sich, warum das Schöne so leicht im Geiste aufgenommen wird und sich auch der Gedankenwelt am meisten anpasst. (Lipps. Kant.)

Aber dies gilt nur vom normalen Zustande, und es würde grundfalsch sein zu meinen, dass diese Bedingung sowohl in Bezug auf die Empfindungen als auf den fühlenden Geist stetig erfüllt ist. Sobald der Geist ermüdet wird vom langen Empfinden, oder man sich den Eindrücken schon angewöhnt hat, ist der normale Zustand vorbei. Normal wirkt der Geist nur, wenn er nicht ermüdet ist und keine Gewohnheit die maximale Spannung der Aufmerksamkeit beeinträchtigt. Ist ein derartiger abnormaler Zustand da, so werden wir ungeschickt zu den höchsten Lustgefühlen, der Reiz des Schönen flieht davon und die nackte Schönheit lässt uns kalt. Wenn wir das Schöne lieben, tragen wir Sorge, dass der Reiz die schnellen Flügel nicht hebt! Schnell werden wir abgestumpft durch geistige Ermüdung oder durch die reizvernichtende Wirkung der Angewöhnung. Eine zutreffende Abwechslung von Eindrücken und eine genügende Ruhe ist das Beste für den fühlenden Menschen, wenn er geistig gesund bleiben und im Schönen den fesselnden Reiz nicht verlieren will.

§ 10. Wir haben nun die merkwürdige Thatsache zu erklären, dass die Schönheitsurtheile so viele personelle Abweichungen darbieten.

Als erste Ursache für diese Abweichung müssen wir hervorheben, dass ein jeder Mensch, auch wenn er in derselben Umgebung mit Anderen lebt, doch andere Erfahrungen gemacht hat, und die Aussenwelt mit seinen Sinneswerkzeugen und persönlichen Unterscheidungsvermögen wahrnimmt. Er bekommt also Mittelwerthe, welche von denen der Anderen verschieden ausfallen. Zugleich sind dadurch auch seine Schönheitsurtheile ebenfalls verschieden und persönlich. Sehr weit aber weichen in bestimmten Richtungen bei Personen einer selben Umgebung die Schönheitsurtheile auch nicht auseinander, denn sie haben doch dieselben Dinge und Zustände gesehen, und dies erklärt wieder, warum Personen desselben gesellschaftlichen Standes, desselben Landes und Volkes auch in einigen Schönheitsauffassungen übereinstimmen.

Schon rührten wir hiermit die zweite Ursache der Abweichungen an, dass nämlich die Schönheitsurtheile sich ändern, sobald die Umstände und gesellschaftlichen Verhältnisse sich ändern. Die Mode war ein erstes Beispiel davon, aber auch manche sogenannte Sittengesetze und Regeln des Anstandes sind im Grunde nichts weiteres als ästhetische Urtheile, sie ändern sich, sobald durch äusserliche Einflüsse der Mittelwerth sich ändert. Wie weit unsere Sittengesetze und Begriffe von Moralität sich zu den rein ästhetischen Urtheilen zurückführen lassen, ist nicht Sache dieser Abhandlung, würde aber nach meiner Meinung ein sehr lohnendes Thema sein.

§ 11. Die dritte Ursache der Abweichungen der personellen Schönheitsurtheile von einander werden wir jetzt nachweisen.

Ein Ding aus der alltäglichen Erfahrung kennzeichnet sich nicht durch ein einziges Merkmal und fällt nicht einer einzigen Gruppe anheim. Im Gegentheil, es bietet eine Menge Merkmale dar und gehört zu mancher Gruppe. Es hat eine Form, eine Farbe, einen Glanz, ist ein Metall, eine Flüssigkeit u. s. w., und auf jeden dieser Merkmale und Gruppierungen kann ein urtheilender Mensch den Nachdruck legen, so dass er die Schönheit des Dinges nur abwägt nach der Schönheit des willkürlich bevorzugten Merk-

males oder der Gruppe. Hieraus erklärt sich auch die Aussage, dass ein Ding zugleich schön und hässlich sein kann. Denn es ist in einer Hinsicht, Farbe z. B., schön und in einer anderen, Form z. B., hässlich, wenn die Farbe dem subjectiven Mittelwerthe sich sehr gut näherte, aber die Form ihrem Mittelwerthe gar nicht gleich kam. Ein Schwein kann als Thier hässlich, als Schwein schön sein. Logisch würde es sein, wenn man sagte: ein Ding kann in einer Hinsicht schön, in einer anderen hässlich sein. Bei den Merkmalen wird also die Schönheit eines Dinges abgemessen nach den Schönheitswerthen seiner einzelnen Merkmale. Bei der Beurtheilung von Gruppierungen haben wir aber eine combinatorische Schönheit, und sie ist wichtiger als die analytische. Denn man kann fragen: welche von allen möglichen Combinationen von Farben und Formen z. B. entsprechen am meisten dem Mittelwerthe aus allen gesehenen Combinationen von Farbe und Form? Oder: welche von allen gesehenen Insekten findet man schön, welches Säugethier, welche Affen? Die vollständige Auflösung solcher Aufgaben kann aber nur experimentell und mathematisch gegeben werden, so sie nicht der Unbestimmtheit wegen sich der wissenschaftlichen Controle entziehen, und ich ziehe diesen Weg auch darum vor, weil die Möglichkeit von vornherein nicht ausgeschlossen ist, dass mehrere Combinationen sich als die schönsten herausstellen.

Die Lustgefühle, welche ein Schönheitsurtheil begleiten können, sind deshalb zu betrachten nach ihrer Intensität und nach ihrer Complexität.

Ein Lustgefühl ändert sich der Intensität (Stärke) nach, sobald sich die Schönheit eines einzigen Merkmales ändert; und es wechselt der Complexität (Höhe) nach, sobald die combinatorische Schönheit eines Gegenstandes variirt.

§ 12. Der vierten Ursache der Abweichungen im ästhetischen Geschmacke begegnen wir in den Symbolisationen und Associationen.

Der menschliche Geist kann ein Ding auf zweierlei Weise betrachten. Er kann es halten für was es ist, und er kann es halten für was es nicht ist. Im letzteren Falle tritt das

Ding hervor als Stellvertreter. Man nennt einen derartigen geistigen Stellvertreter: ein Symbol.

Die Buchstaben und ihre Verbindungen sind die Symbole von Wörtern, welche ihrerseits die Symbole sind von Vorstellungen und Begriffen. Zu logischen Sätzen zusammengefügt symbolisiren sie wieder die Gedanken.

Die Symbolisationen haben einen enormen culturellen Werth, und nicht nur die Sprache, sondern auch die Wissenschaften, wie Mathematik und Chemie, haben ihre Fortschritte neben den grossen Principien auch den zutreffenden Symbolisationen zu danken. Und was würde geblieben sein von den aus der Seele der grossen Musiker emporgestiegenen Melodien, wenn nicht eine Notenschrift sie für uns an der Erde gefesselt hielt?

Jede Symbolisation hält fest, was wir nicht festhalten können, sie erleichtert in hohem Maasse die Operationen des Geistes und ist oft das einzige Mittel zur Uebertragung von Ideen und Gefühlen. Sie beruht auf der Association, aber oft spricht man von Associationen, wo nur Symbolisationen gemeint waren.

In der Aesthetik haben diese Symbolisationen eine hohe Bedeutung, denn es kommt oft vor, dass man ein Schönheitsurtheil ausspricht nicht von einem Dinge für sich, sondern von dem Dinge als Symbol. Ein Ding ist unter Umständen ein Symbol mehrerer anderer Dinge. Ein Kreuz wird z. B. aufgefasst als Crucifix oder als Schwert mit Griff, und durch derartige persönliche Symbolisationen fallen deshalb auch die betreffenden Schönheitsurtheile verschieden aus.

Als reine Associationen treten die Erinnerungen hervor, welche ebenfalls ein ästhetisches Urtheil erheblich beeinflussen können. Ein Ding erinnert an die Heimat und wird darum für schön gehalten. Der Name eines Malers erinnert an seinen Ruhm und man zwingt sich seine Male-
reien schön zu nennen, fühlt es aber nicht.

So kann durch Associationen, durch Einflüsse von Autoritäten, durch Zweckmässigkeit, Suggestion u. s. w., den Dingen ganz fehlerhaft ein höherer ästhetischer Werth zugeschrieben werden, als sie für das betreffende Subject haben.

Wir werden also noch untersuchen, wie weit ein Urtheil über Symbole als ein ästhetisches betrachtet werden kann. Sobald man meint, ein Ding A_1 als Symbol eines zweiten Dinges B betrachten zu können, entsteht sofort die Möglichkeit, dass auch ein anderes Ding A_2 als Symbol von B brauchbar ist. Ebenso können viele Dinge, A_3 , A_4 u. s. w., als Symbole von B benutzt werden.

Dergleichen trifft man an bei einer Beschreibung einer Sache. Offenbar ist eine Beschreibung nichts Weiteres als der Symbolencomplex, wodurch die zu beschreibende Sache vertreten wird und wodurch sie zugleich von dem Einen zum Anderen übertragen werden kann. Man kann aber dieselbe Sache auf die verschiedensten Arten beschreiben und bekommt also eine Menge Symbolisationen derselben Sache.

Welche Symbolisation ist nun aber die zweckmässigste? Natürlich diejenige, welche am besten die Sache vertreten kann. Der Mittelwerth aber aus allen gegebenen Symbolisationen vertritt am besten die Sache, denn eine Mittelform vereinigt alles Wesentliche in sich und lässt das Accidentelle bei Seite. Deshalb ist diejenige Symbolisation, welche sich am meisten dem Mittelwerthe aus allen gegebenen näherte, nicht nur die zweckmässigste, sondern auch die schönste. Hier einigt sich also die Schönheit mit der Zweckmässigkeit. Eine Symbolisation hat also einen ästhetischen Werth und je mehr desto weniger das Symbol-sein verspürt wird.

Ein Kunstwerk wird inhaltlich nicht anders als nach dem ästhetischen Werth der Symbolisation beurtheilt. Ist eine Malerei nicht inhaltlich schön, wenn sie uns in die Welt hineinzieht, welche sie uns vorzaubern will, welche sie symbolisirt? Ein Roman ist dann inhaltlich schön, wenn wir lesend nicht fühlten, dass wir lasen, wenn die Sprache alle ihre Kräfte darbot, um den Leser in eine andere Welt zu versetzen. Im Heiligthume der Musik, so wir sie nicht formell sondern inhaltlich beurtheilen, rührt uns die Schönheit der Melodie, wie der Componist unter allem Compositionswechsel sie uns vorführt, wenn sie das richtige Symbol ist des stillen Liedes unseres eigenen Herzens, das sinnliche Symbol unserer Stimmung.

§ 13. Ausser allen Qualificationen von schön und hässlich, welche man einer Sache zuschreibt, gibt es noch eine ästhetische Qualität, welche wir, getrennt von aller Beimischung von Lustgefühlen, das Uebermässige nennen können.

Natürlich tritt das Uebermässige, sobald es ins Bewusstsein kommt, in Relation mit einem bestimmten Lustgeföhle und erhält dann die Bezeichnungen von: erhaben, majestätisch, aussergewöhnlich u. s. w.

Diese Theorie hat aber nur Eines zu erklären: Wie kann das Uebermässige einen ästhetischen Werth haben und selbst ein ästhetisches Maximum darstellen?

Etwas kann nur übermässig gross oder übermässig klein genannt werden, wenn seine Dimension um so viel von dem Mittelwerthe der bekannten, gebräuchlichen Dimensionen abweicht, dass der Geist von einer Bestimmung von Verhältnissen der Grösse oder Kleinheit wegen absehen muss.

Wer kann die Höhe eines Berges noch genau abschätzen nach seiner eigenen Körperlänge? Wer ist im Stande, die Kleinheit eines Sternes als Lichtpunkt zu messen? Unbedingt ist das Uebermässige, sei es in Grösse oder in Kleinheit, durch die Grenze der menschlichen Kräfte bestimmt, denn im Absoluten ist kein Uebermässiges da.

Von vornherein würde man also sagen, dass deshalb das Uebermässige als äusserst hässlich empfunden werden sollte, weil die Abweichung vom Mittelwerthe so beträchtlich ist, und ohne Zweifel fühlt man dies, sobald ein Unlustgefühl das Uebermass begleitet, z. B. bei Epidemien und Kriegen.

Kann aber unter Umständen auch ein Lustgefühl das als übermässig empfundene begleiten, so spricht man vom Erhabenen und ertheilt ihm einen hohen ästhetischen Werth.

Woher dies? Die Erklärung ist leicht, denn ein Lustgefühl weckt immer die Begierde nach Erhöhung der Lust, im Gegensatz mit einem Unlustgeföhle, das immer die Begierde wachruft nach Erniedrigung, Linderung der Unlust. Eine Erhöhung der Lust würde beim Uebermässigen eintreten, wenn es noch übermässiger wäre, und wo die Wirklichkeit nicht ausreicht, da kommt die Phantasie zu Hülfe und lässt uns meinen, dass das Uebermässige immer noch grösser sein kann, bis ins Unvorstellbare. So breiten wir

unbemerkt die Reihe der möglichen Grösse bis ins Unvorstellbare hinein aus und verschieben zugleich dadurch den Mittelwerth nach dem äussersten Werth, den man gesehen hat oder noch weiter, und er bleibt dennoch ein Mittelwerth, weil nach allen gesehenen Formen der Geist alle denkbaren Formen noch hinzugefügt hat. So wird also durch die begleitenden Lustgefühle das Uebermässige um so schöner, je nachdem es übermässiger ist.

Ich habe auch immer empfunden, dass das Gefühl des Erhabenen begleitet wurde von der Meinung, dass man Uebermässigeres noch nie gehört oder gesehen hat. Nachdem also etwas übermässiger ist, wird es auch um so erhaben oder elend gefunden, je nachdem ein Lust- oder Unlustgefühl es begleitet. So bestimmen hier die Lust- und Unlustgefühle ausschliesslich die Richtung der ästhetischen Werthschätzung.

§ 14. Die wichtigsten Erscheinungen im Gebiete des Schönen haben wir bis jetzt aus unserer Theorie erklären können, soweit dies ohne mathematische Betrachtungen möglich war. Wir werden nun im zweiten Buche eine exakte Darstellung der Theorie geben und setzen dabei die allgemeinen Betrachtungen des ersten Buches als Bekanntes voraus.

Zweites Buch.

Wissenschaftliche Entwicklung der Theorie.

I. Theil:

Vom ästhetischen Maximum.

§ 15. Der Zweck dieser Abhandlung ist, zu zeigen, dass unsere ästhetischen Gefühle auf einer zwar unbewussten, aber genau bestimmbar mathematischen Operation unseres Geistes beruhen. Wir gehen von der im ersten Theile im Allgemeinen auseinander gesetzten Hypothese aus, dass der Mensch unbewusst aus den Dingen seiner Erfahrung Mittelwerthe aufbaut und dass diese den Schönheitsmaxima entsprechen.

Das Erste, was uns also zu thun vorliegt, ist, die mathematische Gestalt der Mittelwerthe zu bestimmen.

In der Mathematik gebraucht man gewöhnlich drei Mittelwerthe: den arithmetischen, den geometrischen und den harmonischen. Hat man zwei Grössen, a_1 und a_2 , so sind diese respective:

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2); \quad \sqrt{a_1 a_2}; \quad \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Hat man n Grössen, a_1 bis a_n , so ist der arithmetische Mittelwerth:

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n),$$

der geometrische Mittelwerth:

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n)^{\frac{1}{n}},$$

der harmonische Mittelwerth:

$$n(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_{n-1}^{-1} + a_n^{-1})^{-1}.$$

Der Vollständigkeit wegen muss ich noch das arithmetisch-geometrische Mittel aus zwei Zahlen erwähnen, woraus Gauss eine Werthbestimmung von elliptischen Integralen hergeleitet hat ¹⁾. Bei unseren Untersuchungen werden wir es aber bei Seite lassen können.

Obwohl es unendlich viele Weisen gibt, auf denen man sich einen Mittelwerth, aus zwei oder mehreren Grössen aufgebaut, denken kann, liegt es doch sehr nahe, diese drei Mittelwerthe für unseren Zweck näher zu prüfen. Da sie sehr einfach sind und es unmotivirt erscheint, a priori zu denken, dass der menschliche Geist verwickeltere Mittelwerthe bildet, ist es angezeigt, wenigstens mit diesen anzufangen.

Wir müssen aber sofort eine Bemerkung machen, nämlich diese, dass es absolut nicht nothwendig ist, zu denken, dass in jeder Hinsicht der Mensch auf dieselbe Weise den Mittelwerth bildet. Es ist sehr wohl möglich, dass der Mensch aus allen Proportionalitätsbeziehungen geometrische, und aus den absoluten Quantitäten arithmetische Mittelwerthe unbewusst aufbaut. A priori sind wir auf nichts angewiesen. Es kommt also darauf an, Unterscheidungsmerkmale, die über die Art der Mittelwerthsbildung entscheiden, herauszufinden.

§ 16. Die Frage nach der subjectiven Art der Quantitätsbeziehungen berührt eines der schwierigsten Probleme der Psychologie. Kennt der Mensch absolute Quantität oder kennt er sie nur aus ihrer Beziehung zu anderen Quantitäten?

Jede Messung in der Physik wird ausgeführt mit einer Messungseinheit, welche als Constanz vorausgesetzt wird. Sie ist also eine Vergleichung einer Grösse mit einer Messungseinheit derselben Art. Ist die Messungseinheit constant, so können wir von einer absoluten Messung sprechen. Ist auch die Einheit variabel und auf derselben Weise wie die zu messende Grösse, so kann nur eine Proportion angeben,

1) Man kann es finden u. A. in: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis II. Braunschweig, Vieweg u. Sohn, oder in: Laurent, Traité d'Analyse Tome IV. Paris, Gauthier Villars.

wie die Grösse und die Messungseinheit quantitativ zu einander in Beziehung stehen. Wir haben dann ausschliesslich mit Proportionalitätsbeziehungen zu thun. Wie misst aber der menschliche Geist, hat er eine variable Einheit? Dies ist sehr wahrscheinlich. Wie erscheint uns ein Dörfchen, das wir als Kind sahen, wenn wir älter geworden es wieder besuchen, nicht viel kleiner als wir jung es uns vorstellten! Die Messungseinheit ist geändert und wir würden es gar nicht wieder erkannt haben, so wir im Gedächtnisse nicht einen Apparat besaßen, der äusserst genau die Proportion festbehielt, indess sich Messungseinheit und Gemessenes fortwährend im Gehirn änderten.

Ich meine deshalb den sichersten Weg zu gehen, wenn ich anfangs nur auf die Proportionalitätsbeziehungen Acht zu geben. Vielleicht beruht alle psychische Quantitätsbestimmung nur auf der von Proportionen und wir werden also versuchen, die mathematische Gestalt der Mittelwerthsbildung bei Proportionalitätsbeziehungen ausfindig zu machen.

§ 17. Denken wir uns, wir haben eine gerade Linie AB
 $\overset{A}{|} \text{---} \overset{C}{|} \text{---} \overset{B}{|}$ durch einen Punkt C in zwei ungleiche
 Stücke, AC und CB , getheilt, so können wir die zwei Proportionen $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{CB}{AC}$ betrachten. Mathematisch sind sie verbunden durch die Gleichung $\frac{AC}{CB} = 1 : \frac{CB}{AC}$. Nun lege ich einer Versuchsperson die Frage vor: »Bestimmen Sie mir durch einen Punkt C_m in der Linie AB das Verhältniss $\frac{AC_m}{C_mB}$, was für Sie am schönsten ist; nur dürfen Sie C_m nicht in die Mitte verlegen«. Durch diesen Zusatz schliesse ich die Gleichheit der Stücke als Wahlresultat aus.

Nach der Theorie wird sie nun $\frac{AC_m}{C_mB}$ gleich dem ihr bekannten Mittelwerthe aller Proportionen, welche sie gesehen hat und so ausgedrückt werden konnten, bestimmen. Diese also entstandene schönste Proportion gebe ich einfach an durch $\left(\frac{AC}{CB}\right)_s$.

Zweitens aber frage ich diese: »Bestimmen Sie mir durch einen Punkt C_m in der Linie AB das Verhältniss $\frac{C_m B}{A C_m}$ was für Sie am schönsten ist; nur müssen die Stücke ungleich bleiben«. Nach der Theorie wird sie ebenso wie oben handeln und $\frac{C_m B}{A C_m}$ als Mittelwerth aus den ihr bekannten so ausgedrückten Proportionen bestimmen. Wir geben diese schönste Proportion an durch $\left(\frac{CB}{AC}\right)_s$.

Nun wird ein Jeder sofort sagen und, wenn nicht, doch wenigstens beistimmen müssen, dass ich im Grunde doch dasselbe frug, nur im anderen Wortkleide, und dass natürlich die Versuchsergebnisse in dieser Beziehung stehen $\left(\frac{AC}{CB}\right)_s = 1 : \left(\frac{CB}{AC}\right)_s$.

Wir lernten also, dass wenn die Proportionalitätsbestimmung durch diese Umkehrung keine wesentliche und nur scheinbare Aenderung erfährt, dann der Bedingungsgleichung $\left(\frac{AC}{CB}\right)_s = 1 : \left(\frac{CB}{AC}\right)_s$ Genüge geleistet wird. Bringt aber die Umkehrung der Proportionalitätsbestimmung auch eine wesentliche Aenderung in dem ästhetischen Probleme, so gilt die genannte Gleichung a priori nicht. In der Musik z. B. gibt die Umkehrung der Intervalle zu ganz anderen ästhetischen Problemen Veranlassung, und dann sind wir von vornherein nicht berechtigt, die gegebene Gleichheit aufzustellen, obgleich sie hinterher sich sehr wohl bestätigen könnte.

Die Umkehrbarkeit findet nun glücklicherweise bei der Bestimmung einfacher räumlicher Formverhältnisse statt. Sie ist wichtig, weil, wie einfach auch, sie ein Kriterium ist zur Bestimmung der Art der Mittelwerthsbildung¹⁾.

§ 18. Geben wir symbolisch den Mittelwerth aus einigen Werthen von der Proportion $\frac{a}{b}$ durch $M\left(\frac{a}{b}\right)$ an, dann ist

1) Später habe ich bemerkt, dass Fechner schon in seiner Schrift: Zur experimentalen Aesthetik, S. 57, die nämliche Bemerkung gemacht hat.

deshalb das Kriterium der Umkehrbarkeit $M\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{M\left(\frac{b}{a}\right)}$.

Prüfen wir an dieser Bedingungsgleichung den arithmetischen Mittelwerth $M_A\left(\frac{a}{b}\right)$ aus den Proportionen

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n},$$

so ist:

$$M_A\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right)$$

und

$$M_A\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \right).$$

Wir sehen sofort, dass hier $M_A\left(\frac{a}{b}\right)$ ungleich $\frac{1}{M_A\left(\frac{b}{a}\right)}$

ist und schliessen deshalb, dass der arithmetische Mittelwerth hier nichts taugt, denn $\frac{1}{M_A\left(\frac{b}{a}\right)}$ ist der harmonische

Mittelwerth von $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$. Hieraus folgt ebenso, dass auch der harmonische Mittelwerth die Bedingung nicht erfüllt. Nur der geometrische Mittelwerth entspricht dieser Condition, denn

$$M_m\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n} \right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$1 : \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{M_m\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Unsere Untersuchung weist uns also nach dem geometrischen Mittelwerthe hin, und da die anderen schon die genannte Bedingung nicht erfüllen, können wir sie bei Seite lassen.

§ 19. Es ist nun für die weitere Anwendung der Theorie nothwendig, etwas tiefer in die Eigenthümlichkeiten des geometrischen Mittelwerthes einzudringen, und wir erlauben uns deshalb eine allerdings unumgängliche mathematische Auseinandersetzung.

Gibt die Bestimmung des geometrischen Mittelwerthes m aus einigen discreten Grössen $a_1, a_2 \dots a_n$ zu keinen Schwierigkeiten Veranlassung und wird sie am bequemsten logarithmisch ausgeführt, sodass

$$\log m = \frac{1}{n} (\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_n)$$

ist, anders wird es, wenn es für die Auflösung eines bestimmten Problems nothwendig ist, den geometrischen Mittelwerth aus allen Werthen, welche eine Variable x annehmen kann, zwischen den Grenzwerten x_1 und x_2 zu bestimmen. Wir haben allerdings in den meisten Fällen mit einer solchen Aufgabe zu thun; denn der Mensch sieht zwischen den natürlichen Grenzen seiner Vorstellungsbilder über Tausende von Uebergängen eines Dinges, und denkt sich selbst sämtliche Uebergänge hinzugefügt, wenn sie einmal fehlen. Wir nähern uns der Wahrheit denn auch viel mehr, wenn wir zwischen den bestimmten Grenzen eine continue Reihe von Uebergängen des Dinges annehmen, und auch mathematisch haben wir ein Recht, in einer sogar nicht mehr angeblichen Discontinuität eine Continuität zu erblicken. Es ist nun auch klar, dass es uns aber nicht gestattet ist, continue Uebergänge anzunehmen, wenn im Dinge selbst eine Discontinuität charakteristisch ist. Nur dann haben wir direct die einfache Formel

$$\log m = \frac{1}{n} \sum_1^n \log a_n$$

zu benutzen. Ein Beispiel wird uns dies später deutlich zeigen.

Unsere Aufgabe ist also jetzt: den geometrischen Mittelwerth von allen Werthen zu bestimmen, welche die Variable x hat zwischen x_1 und x_2 .

Es ist aber bequemer, wenn wir sofort die Sache ein wenig verallgemeinern und fragen nach dem geometrischen Mittelwerthe aller Werthe, welcher eine bestimmte Function von x , nämlich $F(x)$, annehmen kann zwischen $F(x_1)$ und $F(x_2)$.

Es hat sich mir äusserst praktisch gezeigt, für diesen geometrischen Mittelwerth von $F(x)$ das Symbol $\overset{x_2}{\underset{x_1}{MF}}(x)$ zu benutzen. Wir bestimmen es derart:

Geben wir an $F(x)$ alle Werthe zwischen $F(x_1)$ und $F(x_2)$, so können wir sie also schreiben:

$$F(x_1), F(x_1 + \Delta x), F(x_1 + 2\Delta x), \dots, F(x_1 + (n-1)\Delta x).$$

Wir theilten also den Unterschied $x_2 - x_1$ in n gleiche Stücke Δx , so dass $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n}$ und n Werthe von $F(x)$ da sind. Wird n sehr gross genommen, so wird Δx sehr klein, und beim Grenzwerte ($n = \infty$) bekommen wir alle Werthe von $F(x)$ zwischen $F(x_1)$ und $F(x_2)$.

Es ist also:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{MF}}(x) = \lim \left[F(x_1) \cdot F(x_1 + \Delta x) \cdot F(x_1 + 2\Delta x) \cdot \dots \cdot F(x_1 + (n-1)\Delta x) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Nehmen wir beiderseitig den natürlichen Logarithmus, so ist:

$$l\left(\overset{x_2}{\underset{x_1}{MF}}(x)\right) = \lim \frac{1}{n} \left[lF(x_1) + lF(x_1 + \Delta x) + lF(x_1 + 2\Delta x) + \dots + lF(x_1 + (n-1)\Delta x) \right].$$

Setzen wir $lF(x) = \varphi(x)$, so wird

$$l\left(\overset{x_2}{\underset{x_1}{MF}}(x)\right) = \lim \frac{1}{n} \left[\varphi(x_1) + \varphi(x_1 + \Delta x) + \varphi(x_1 + 2\Delta x) + \dots + \varphi(x_1 + (n-1)\Delta x) \right],$$

oder:

$$l\left(\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x)\right) = \text{Lim} \frac{\Delta x}{x_2 - x_1} \sum_{x=x_1}^{x=x_1+(n-1)\Delta x} \varphi(x)$$

Aber $x_1 + (n-1)\Delta x = x_1 + n\Delta x - \Delta x = x_2 - \Delta x$, so dass wir finden:

$$l\left(\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x)\right) = \text{Lim} \frac{\Delta x}{x_2 - x_1} \sum_{x=x_1}^{x=x_2-\Delta x} \varphi(x)$$

Nach Cauchy's Definition von bestimmten Integralen ist deshalb

$$l\left(\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x)\right) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} lF(x) dx,$$

oder:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x) = e^{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} lF(x) dx}.$$

Als bequemere Schreibweise kann man auch setzen:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x) = \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} lF(x) dx$$

nach der Definition $\exp. m = e^m$.

Wir haben also gefunden, dass:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}F(x) = \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} lF(x) dx$$

den geometrischen Mittelwerth darstellt von allen Werthen von $F(x)$ zwischen $F(x_1)$ und $F(x_2)$.

§ 20. Ich glaube, es wäre am besten, wenn ich sofort alle Theoreme anführe, welche wir fortwährend anwenden werden, um so mehr, weil ich den Aesthetikern und Psychologen, welche sich nicht auf die höhere Mathematik, speciell die Integralrechnung, verstehen, doch ein compactes Formularium in der von mir angewandten Symbolik geben will, was sie in den Stand setzt, das Folgende zu verstehen

und womit sie selbst arbeiten können, wenn ihnen die elementare Mathematik nur bekannt ist und sie die folgenden acht Theoreme gläubig annehmen.

Erstes Theorem:

$$\underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x) = \underset{x_2}{M}^{\overset{x_1}{}} F(x) \quad \text{I.}$$

Beweis:

$$\underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x) = \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l F(x) dx = \exp. \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_2}^{x_1} l F(x) dx = \underset{x_2}{M}^{\overset{x_1}{}} F(x).$$

Zweites Theorem:

$$\underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} [a F(x)] = a \underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x) \quad a = \text{Constans.} \quad \text{II.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} [a F(x)] &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l [a F(x)] dx = \\ &= \exp. \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l a \cdot dx + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l F(x) dx \right] = \\ &= \exp. \left[\frac{l a}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l F(x) dx \right] = \\ &= (\exp. l a) \left(\exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l F(x) dx \right) = a \underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x). \end{aligned}$$

Drittes Theorem:

$$\left[\underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x) \right]^m = \underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} (F(x))^m \quad m = \text{Constans.} \quad \text{III.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left[\underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} F(x) \right]^m &= \exp. \frac{m}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l F(x) dx = \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} m l F(x) dx = \\ &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l (F(x))^m \cdot dx = \underset{x_1}{M}^{\overset{x_2}{}} (F(x))^m. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $m = -1$ erhalten wir $\overset{x_2}{M}_{x_1} F(x) = 1 : \overset{x_2}{M}_{x_1} \frac{1}{F(x)}$, womit bewiesen ist, dass die Bedingung der Umkehrbarkeit auch bei der continuen Mittelwerthsbildung erfüllt ist.

Viertes Theorem:

$$\overset{x_2}{M}_{x_1} [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) \cdot \overset{x_2}{M}_{x_1} \psi(x) \quad \text{IV.}$$

$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind Functionen von x .

Beweis:

$$\begin{aligned} \overset{x_2}{M}_{x_1} [\varphi(x) \cdot \psi(x)] &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l[\varphi(x) \cdot \psi(x)] dx = \\ &= \exp. \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l\varphi(x) dx + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l\psi(x) dx \right] = \\ &= \left(\exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l\varphi(x) dx \right) \left(\exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l\psi(x) dx \right) = \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) \cdot \overset{x_2}{M}_{x_1} \psi(x). \end{aligned}$$

Fünftes Theorem:

$$\overset{x_2}{M}_{x_1} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) : \overset{x_2}{M}_{x_1} \psi(x). \quad \text{V.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \overset{x_2}{M}_{x_1} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) [\psi(x)]^{-1} = \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) \cdot \overset{x_2}{M}_{x_1} [\psi(x)]^{-1} = \\ &= \overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x) \cdot \left[\overset{x_2}{M}_{x_1} \psi(x) \right]^{-1} = \frac{\overset{x_2}{M}_{x_1} \varphi(x)}{\overset{x_2}{M}_{x_1} \psi(x)}. \end{aligned}$$

Sechstes Theorem:

$$\overset{x_2}{M}_{x_1} x = \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \quad e = 2,7182818.... \quad \text{VI.}$$

Beweis: Bei a und b als Constanten ist:

$$\begin{aligned}
 M_{x_1}^{x_2}(ax + b) &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} l(ax + b) dx = \\
 &= \exp. \frac{1}{a(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} l(ax + b) d(ax + b) = \\
 &= \exp. \left(\frac{1}{a(x_2 - x_1)} [(ax + b) l(ax + b) - (ax + b)]_{x_1}^{x_2} \right) = \\
 &= \exp. \left(\frac{1}{a(x_2 - x_1)} \{ l(ax_2 + b)^{(ax_2 + b)} - l(ax_1 + b)^{(ax_1 + b)} \} - 1 \right) = \\
 &= \left(\exp. l(ax_2 + b)^{\frac{ax_2 + b}{a(x_2 - x_1)}} \right) \left(\exp. - l(ax_1 + b)^{\frac{ax_1 + b}{a(x_2 - x_1)}} \right) (\exp. - 1) = \\
 &= \frac{1}{e} \left[\frac{(ax_2 + b)^{(ax_2 + b)}}{(ax_1 + b)^{(ax_1 + b)}} \right]^{\frac{1}{a(x_2 - x_1)}}.
 \end{aligned}$$

Für $a = 1$ und $b = 0$ ist also:

$$M_{x_1}^{x_2} x = \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}}.$$

Siebentes Theorem:

$$M_{x_1}^{x_2}(ax + b) = M_{ax_1 + b}^{ax_2 + b} x \quad \text{VII.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 M_{x_1}^{x_2}(ax + b) &= \frac{1}{e} \left[\frac{(ax_2 + b)^{(ax_2 + b)}}{(ax_1 + b)^{(ax_1 + b)}} \right]^{\frac{1}{a(x_2 - x_1)}} \\
 &= \frac{1}{e} \left[\frac{(ax_2 + b)^{(ax_2 + b)}}{(ax_1 + b)^{(ax_1 + b)}} \right]^{\frac{1}{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}} = M_{ax_1 + b}^{ax_2 + b} x.
 \end{aligned}$$

Achtes Theorem:

$$M_{x_1}^{x_2}(ax) = M_{ax_1}^{ax_2} x = a M_{x_1}^{x_2} x \quad \text{VIII.}$$

Beweis: Für $b = 0$ ist aus VII. und II. zu folgern:

$$M_{x_1}^{x_2}(ax) = M_{ax_1}^{ax_2} x = a M_{x_1}^{x_2} x.$$

§ 21. Die experimentelle Aesthetik sichtbarer Formen hat sich bis jetzt hauptsächlich mit der Bestimmung wohlgefälligster Verhältnisse bemüht.

Ich fange deshalb an, unsere allgemeinen Theoreme für die theoretische Auflösung dieses Problems zu benutzen: Wenn der Mensch das ästhetische Maximum, das schönste aller quantitativen Verhältnisse, anzugeben hat, fragt man, wie es nach dieser Theorie ausfallen kann.

Auflösung: Denken wir uns eine Linie AB , welche wir der Einfachheit halber gleich 1 setzen, also $AB = 1$, durch einen Punkt C zwischen A und B in zwei Stücke, $AC = x$ und $CB = 1 - x$, getheilt. Nimmt x alle Werthe an zwischen $x = 0$ und $x = 1$, so durchläuft das Verhältniss $\frac{1-x}{x}$ alle Werthe zwischen ∞ und Null.

Hätte der Mensch also die Fähigkeit, auch unendlich kleine und unendlich grosse Verhältnisse schätzen zu können, so würde die schönste aller Proportionen nach der Theorie gegeben sein, entweder durch

$$\overset{1}{\underset{0}{M}}\left(\frac{1-x}{x}\right) \text{ oder durch } \frac{1 - \overset{1}{\underset{0}{M}}x}{\overset{1}{\underset{0}{M}}x}.$$

Denn setzt man $y = \frac{1-x}{x}$, so hat man in $\overset{1}{\underset{0}{M}}\frac{1-x}{x}$, vorausgesetzt, dass y die psychisch unabhängige Variabele ist, und in $\frac{1 - \overset{1}{\underset{0}{M}}x}{\overset{1}{\underset{0}{M}}x}$, dass x die psychisch unabhängige

Variabele war. Wir haben von vornherein keinen Grund, die erste Form der zweiten zu bevorzugen, da wir über die psychisch unabhängigen Variablen nichts Bestimmtes wissen und vielleicht Beides gleich möglich ist.

Ogleich wir fernerhin die nothwendigen Correctionen anbringen werden, welche den menschlichen Grenzen Rechnung tragen, so ist es doch als Einleitung nicht überflüssig, mit dem ideellen Falle anzufangen.

α . Berechnung von $\overset{1}{M}_0\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

$$\overset{1}{M}_0\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{\overset{1}{M}(1-x)}{\overset{1}{M}x} = \frac{\overset{0}{M}x}{\overset{1}{M}_0x} = \frac{\overset{1}{M}x}{\overset{0}{M}_0x} = 1.$$

Die wohlgefälligste Proportion ist also erstens im ideellen Falle $\frac{1-x}{x} = 1$ oder $x = \frac{1}{2}$. Wir nennen dieses Schönheitsprincip: das Princip der Symmetrie.

Nach dem Princip der Symmetrie würde man im ideellen Falle deshalb die Linie in zwei gleiche Stücke theilen.

War die Linie $AB = c$, so würden die Grenzen 0 und c geworden sein und wir hätten das nämliche Resultat bekommen, denn

$$\overset{c}{M}_0 \frac{c-x}{x} = \frac{\overset{c}{M}(c-x)}{\overset{c}{M}x} = \frac{\overset{0}{M}x}{\overset{c}{M}_0x} = \frac{\overset{c}{M}x}{\overset{0}{M}_0x} = 1 = \overset{1}{M}_0 \frac{1-x}{x},$$

was aussagt, dass das Princip der Symmetrie unabhängig ist von der Summe der Theile.

β . Berechnung von $\frac{1-\overset{1}{M}x}{\overset{1}{M}_0x}$.

$$\overset{1}{M}_0x = \frac{1}{e} \left[\frac{1}{(x^x)_{x=0}} \right]^{\frac{1}{1-0}} = \frac{1}{e} \frac{1}{(x^x)_{x=0}}.$$

Setzen wir $(x^x)_0 = e^{(xlx)_0}$, so ist:

$$(xlx)_0 = \left[\frac{lx}{1} \right]_{x=0} = \left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right]_{x=0} = [-x]_{x=0} = 0$$

so dass $(x^x)_0 = e^0 = 1$. Also ist:

$$\overset{1}{M}_0x = \frac{1}{e}, \quad e = 2,7182818 \dots$$

und

$$\frac{1 - \frac{1}{0} Mx}{\frac{1}{0} Mx} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{e - 1}{1} = 1,7182818 \dots$$

Im ideellen Falle kann also die wohlgefälligste Proportion zweitens sein:

$$\frac{1 - x}{x} = e - 1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{e} = 0,367879 \dots$$

Wir nennen dieses Schönheitsprincip: das Princip der Asymmetrie.

Nach dem Princip der Asymmetrie würde man im ideellen Falle die Linie in zwei Stücke theilen, welche sich wie 0,367879 : 0,632121 verhalten.

War $AB = c$, so hätten wir gefunden:

$$\frac{c - \frac{c}{0} Mx}{\frac{c}{0} Mx} = \frac{c - \frac{c}{e}}{\frac{c}{e}} = \frac{e - 1}{1}$$

was aussagt, dass auch das Princip der Asymmetrie unabhängig ist von der Summe der Theile. Wir können also beide Principien als Grundlagen von allen möglichen Proportionsbildungen mit einer Variabele betrachten.

§ 22. Die Nothwendigkeit einer Correction wird offenbar, wenn wir zweierlei überlegen. Erstens müssen wir anerkennen, dass, obgleich ein Mensch vielleicht eine sehr grosse und sehr kleine Proportion beurtheilen kann, er doch nicht im Stande ist, ein unendlich kleines und unendlich grosses Verhältniss zu schätzen. Alle Merkmale von Proportionalität fallen hier fort. Um dies zu berücksichtigen, haben wir nur die Integrationsgrenze 0 und 1 entsprechend zu ändern in Δ und $1 - \Delta$, wo Δ den kleinen Werth von x angiebt, welcher zuerst das Bild einer Proportionalität zwischen x und $1 - x$ im Geiste wachzurufen vermag. Man

würde Δ die Proportionalitätsschwelle nennen können¹⁾, und es dünkt mir äusserst wahrscheinlich, dass Δ im engen Zusammenhange steht mit der Unterschiedsschwelle der beurtheilten Grössen.

Zweitens sind wir aber, auch so wir diese Correction anbringen, noch mit einem ideellen Falle beschäftigt. Denn diese Schönheitstheorie lehrt nicht, dass das ästhetische Maximum als Mittelwerth aus allen möglichen Formen hervortritt, sondern, wir betonen es nachdrücklich, aus allen wirklichen Formen, welche der Mensch kennt, sowie sie für ihn sind. Aber dann ist auch zugleich die Untersuchung nothwendig persönlich geworden, und man kann die Theorie nur an persönlichen Experimenten prüfen. Jeder Mensch hat sein eigenes Schönheitsgesetz, weil seine Erfahrung ganz persönliche Grenzen hat. Die Grenzwerte x_1 und x_2 in $MF(x)$ werden durch individuelle Erfahrung bestimmt und sie bestimmen das Wohlgefälligkeitssurtheil. Bevor wir aber diese Theorie mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen, dünkt es mir doch nicht überflüssig, zuvor den Einfluss der Proportionalitätsschwelle sehen zu lassen.

§ 23. Correction von $\frac{1}{0} \frac{1-x}{x}$ für die Proportionalitätsschwelle Δ .

$$\frac{1-\Delta}{\Delta} \frac{1-x}{x} = \frac{\frac{1-\Delta}{\Delta} M(1-x)}{\frac{1-\Delta}{\Delta} Mx} = \frac{\frac{\Delta}{1-\Delta} Mx}{\frac{\Delta}{1-\Delta} Mx} = \frac{\frac{\Delta}{1-\Delta} Mx}{\frac{\Delta}{1-\Delta} Mx} = 1.$$

D. h.: die Proportionalitätsschwelle hat keinen Einfluss auf die Symmetrie.

§ 24. Correction von $\frac{1-\frac{1}{0} Mx}{\frac{1}{0} Mx}$ für die Proportionalitätsschwelle Δ .

1) Denn $\Delta:(1-\Delta) = \Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \dots$, und weil Δ klein ist, wird sehr annähernd $\Delta:(1-\Delta) = \Delta$ sein und Δ ist also auch die ebenmerkliche Proportion.

$$\frac{1 - \frac{Mx}{\Delta}}{\frac{1 - \Delta}{Mx}} = \left[\frac{1 - \Delta}{Mx} \right]^{-1} - 1 = \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{(1 - \Delta)^{(1 - \Delta)}}{\Delta^\Delta} \right]^{\frac{1}{1 - 2\Delta}} \right\}^{-1} - 1 =$$

$$= e \left[\frac{(1 - \Delta)^{(1 - \Delta)}}{\Delta^\Delta} \right]^{\frac{1}{2\Delta - 1}} - 1.$$

Bei der weiteren Entwicklung der Theorie werden wir noch oft der Function x^x begegnen, und ich habe deshalb eine Tabelle dieser Function zu dieser Abhandlung hinzugefügt, um das Rechnen ein wenig zu erleichtern.

Damit wir uns nun eine Idee über den Einfluss der Correction bilden können, habe ich einige Werthe von Δ ausgewählt und den dazu gehörigen Werth von

$$e \left[\frac{(1 - \Delta)^{(1 - \Delta)}}{\Delta^\Delta} \right]^{\frac{1}{2\Delta - 1}} - 1 = m$$

berechnet.

Δ	m
0	1,71828 . .
0,001	1,7022 . . .
0,01	1,6200 . . .
0,02	1,5577 . . .
0,05	1,4296 . . .
0,1	1,2949 . . .

Andere, zwischen diesen liegende Werthe kann man mittelst graphischer Interpolation ziemlich genau ermitteln.

§ 25. Die Principien der Symmetrie und der Asymmetrie, welche direct aus dieser Theorie hervorgehen, sind in der Entwicklungsgeschichte der Auffassungen vom Wesen des Schönen schon lange her vermuthet worden.

War Christian Wolf¹⁾ († 1754) derjenige, der das Princip der Symmetrie als ästhetisches Normalverhältniss zu

1) Chr. Wolf, Beiträge zur Aesthetik der Baukunst.

begründen versuchte, in Zeising¹⁾ begegnen wir einem Manne, der sich eifrigst bemüht hat, sogar das ganze Weltall durch goldne Schnitte zu spalten. Der goldne Schnitt, die bekannte Theilung einer geraden Linie AB in zwei Abschnitte AC und CB , so dass $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$, einem Verhältnisse entsprechend von $AC:CB = 0,38197...:0,61803...$ oder von $CB:AC = 1,61803...:1$ mit fünfstelliger Genauigkeit, war ihm nicht nur das Normalverhältniss für alle menschlichen ästhetischen Urtheile, er trug aber auch eine ästhetische Tendenz in die Natur hinein und versuchte sein Princip an Pflanzen, Thieren, Krystallen und Gestirnsystemen nachzuweisen. Selbst die Ethik und Religion wollte er nicht sparen, und Fechner²⁾ ist nicht zu weit gegangen, als er die trefflichen Worte sagte:

»Nach dieser so ausserordentlichen Bedeutung, welche der goldne Schnitt hat, muss man sich freilich wundern, dass dieselbe so lange hat verborgen bleiben können, und dies möchte von vornherein geeignet sein, einiges Bedenken dagegen zu erwecken; ja wenn Zeising Andeutungen des goldnen Schnittes sogar in mehreren Sternbildern, in den Planetenabständen und der Gliederung von Land und Meer, auf der Erde u. s. f., Spuren davon sogar in den rein geistigen Sphären der Wissenschaft, sowie in den ethischen und religiösen Beziehungen findet und Alles, was nur leidlich zu passen scheint, dazu herbeizieht, so wird sich Jeder von vornherein sagen, dass seine Lehre mindestens an Uebertreibung und Mängeln der Kritik leiden muss.« —

Das Beste, was noch theoretisch zu Gunsten des goldnen Schnittes anzuführen ist, giebt Külpe³⁾ an, als er in jener Gleichheit der zwei Proportionen $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{CB}{AB}$ einen

1) Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt und mit einer vollständigen Uebersicht der bisherigen Systeme begleitet, von Prof. Dr. A. Zeising, Leipzig 1854.

2) G. Th. Fechner, Zur experimentalen Aesthetik. Leipzig, Hirzel. 1871.

3) O. Külpe, Grundriss der Psychologie. Leipzig, Engelmann. 1893.

Specialfall der Constanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit oder des Weber'schen Gesetzes erblickt. Aber viel ist damit noch nicht gewonnen, denn auch dann bleibt es übrig, den Grund für das Aesthetische der Symmetrie nachzuweisen, und für den goldnen Schnitt noch insbesondere den Grund für das Schöne der Gleichheit von zwei psychisch gleichen Unterschieden.

Diese Theorie wirft aber, nach meiner Meinung, Licht auf die Frage. Es hat mich nämlich sofort frappirt, wie ganz in der Nähe der Proportionalitätsschwelle $\Delta = 0,01$ oder einer von 1% der asymmetrische Mittelwerth der Zahl des goldenen Schnittes gleichkommt (§ 24). Vergleicht man hiermit die Unterschiedsempfindlichkeit für absolute Grösse, nach Fechner 1,6%, nach Volkman 1,13 und 0,93% aus zwei Versuchen, nach Münsterberg 1,1—2,3%, nach Fischer 0,65, 1,37 und 2,16%¹⁾, welche unseres Erachtens niemals um Vieles von der Proportionalitätsschwelle abweichen kann²⁾, so wird es begreiflich, wie ein Specialwerth 1,61803 . . . des asymmetrischen Mittelwerthes so lange als vom goldnen Schnitte herstammend betrachtet ist. Ebenfalls wird es klar, wie man, unter dem Banne des goldnen Schnittes, den persönlichen Charakter aller ästhetischen Urtheile aus dem Auge verlor und oft enorme Abweichungen nicht anders zu beseitigen wusste, als durch sie im grossen Magazin individueller Abnormitäten zu verstecken.

Die Ideen Zeising's sind aber auf eine andere Weise fruchtbar geworden, weil sie der kräftigste Impuls gewesen sind, um selbst im Gebiete der Aesthetik durch Experimente nach Wahrheit zu fragen, wo man glaubte, Göttliches zu berühren.

1) Aus L. Witmer. Zur experimentellen Aesthetik einfacher räumlicher Formverhältnisse. Phil. Studien IX. Leipzig, Engelmann.

2) Denn sind x und $x + S$ zwei Reize mit der Unterschiedsschwelle S , und sei δ die Proportionalitätsschwelle, so ist $\frac{x \pm S}{x} = 1 \pm \delta$. Also $\frac{S}{x} = \delta =$ relative Unterschiedsschwelle. (Nach Weber's Gesetz ist deshalb die Proportionalitätsschwelle eine constante Grösse.)

§ 26. Die wissenschaftliche Vergleichung der Theorie mit den Experimenten ist mir durch die folgende Ueberlegung möglich geworden.

Der geometrische Mittelwerth aus allen Werthen von $F(x)$ zwischen $F(x_1)$ und $F(x_n)$ wird bestimmt durch $\exp. \frac{1}{x_n - x_1} \int_{x_1}^{x_n} l F(x) dx$. Sind $F(x_1)$ und $F(x_n)$ die äussersten Werthe der Function, welche der Mensch kennt, so gibt diese Formel den Werth von $F(x)$ beim ästhetischen Maximum an. Dieser Werth von $F(x)$ wird als schönster betrachtet. $F(x_1)$ und $F(x_n)$ sind aber als äusserste Grenze ästhetische Minima, denn weiter vom Maximum abstehende Werthe von $F(x)$ kennt der Mensch nicht. Aber beide Werthe sind ästhetische Minima, und dem Menschen sind also $F(x_1)$ und $F(x_n)$ ästhetisch gleichwerthig oder gleich schön.

Wir bekommen aber denselben Werth für

$$\exp. \frac{1}{x_n - x_1} \int_{x_1}^{x_n} l F(x) dx,$$

wenn wir statt $F(x_1)$ und $F(x_n)$ zwei andere, zwischen diesen liegende Werthe, $F(x_k)$ und $F(x_p)$, so wählen, dass

$$\frac{1}{x_p - x_k} \int_{x_k}^{x_p} l F(x) dx = \frac{1}{x_n - x_1} \int_{x_1}^{x_n} l F(x) dx$$

wird. Bei der Discontinuität der Formen gilt das Nämliche, und ein Zahlenbeispiel wird dies am besten zeigen:

$$\begin{aligned} (12 \cdot 9,6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot 2 \cdot 1,25 \cdot 1)^{\frac{1}{10}} &= \\ &= (9,6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot 2 \cdot 1,25)^{\frac{1}{8}} = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot 2)^{\frac{1}{6}} = \\ &= (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,4)^{\frac{1}{4}} = (4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wo 1 und 12 ästhetisch gleichwerthig sind.

Ständen $F(x_k)$ und $F(x_p)$ anstatt der Werthe $F(x_1)$ und $F(x_n)$ und im Beispiele 9,6 und 1,25 statt 12 und 1, so würde es scheinen, als ob der Mensch nur $F(x_k)$ und $F(x_p)$ als äusserste Werthe von $F(x)$, und im Beispiele, als ob er nur 9,6 und 1,25 als Grenzwerte gekannt hätte. Und obgleich dies der Wirklichkeit nicht entspricht, wird er auch wohl nicht $F(x_k)$ und $F(x_p)$, und im Beispiele 9,6

und 1,25 als ästhetische Minima charakterisiren, sondern er wird sie doch als ästhetisch gleichwerthig betrachten, aber von höherem Werthe als $F(x_1)$ und $F(x_n)$, und im Beispiele als 12 und 1.

So können wir weiter gehen und unendlich viele Paare zusammengehöriger, ästhetisch gleichwerthiger Specialwerthe von $F(x)$ herausfinden. Jedes Paar hat die für uns äusserst wichtige Eigenschaft, dass es in die Exponentialformel eingesetzt den Werth des ästhetischen Maximums nicht ändert, aber sich benimmt als das Paar der wirklichen äussersten menschlichen Grenzen von $F(x)$.

Experimentell finden wir ein derartiges zusammengehöriges Paar, wenn das Experiment uns in den Stand setzt, ein Paar gleich schöne Functionswerthe zu ermitteln. Würde es erhebliche Schwierigkeiten darbieten, die natürlichen äussersten Grenzen der Wahrnehmungsbilder zu bestimmen, mit diesem mathematisch genau bestimmten Principe der ästhetischen Gleichwerthigkeit sind wir im Stande, auch wenn experimentell sehr wenig gefunden ist, diese Theorie zu prüfen, wenn es nur möglich ist, aus den Versuchen ein Paar als ästhetisch gleichwerthig beurtheilte Formen zu ermitteln.

Die Formel $\overset{x_2}{M}x = \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$ z. B. bekommt durch dieses Princip also eine weitere Bedeutung. Sie sagt nicht nur aus: das ästhetische Maximum von x zwischen dem kleinsten Werthe x_1 und dem grössten x_2 , welchen der Mensch kennt, wird bestimmt aus $\overset{x_2}{M}x$; aber, wenn wir nur ein Paar ästhetisch gleich geschätzte Werthe von x , nämlich x_1 und x_2 kennen, so gibt $\overset{x_2}{M}x$ ebenfalls die schönste x an, unvermindert wie weit x_1 und x_2 von den äussersten Grenzen der Erfahrung abweichen. Wir werden also die ästhetischen Versuchsmethoden zu beurtheilen haben nach ihrer Brauchbarkeit zur genauen Bestimmung ästhetisch-gleichwerthiger Formenpaare.

§ 27. Die experimentelle Untersuchung ästhetischer Probleme verfügt bis jetzt über zwei brauchbare Methoden.

Bei der ersten, der Methode der Wahl, legt man einer Versuchsperson oder mehreren eine bestimmte Reihe von Gegenständen, z. B. Rechtecke vor, welche nur in einer Hinsicht, Länge z. B., von einander verschieden sind, und lässt dann den schönsten auswählen. Ich erwähne nachdrücklich, dass die Gegenstände nur in einer Hinsicht sich ändern mögen, denn sonst bekommt man eine Wahl nach mehreren Kriterien durch die Mehrzahl der unabhängigen Variabeln. Sobald in einer Versuchsreihe diese Bedingung nicht erfüllt ist, hat das Experiment keinen Werth. Das Resultat gibt in diesem Falle dann auch einen wahren Wirrwarr von Zahlen, welcher nichts aussagt und im Gegentheil den Experimentatoren den falschen Schluss ziehen lässt, dass experimentell nichts Bestimmtes zu finden war.

Fernerhin werden wir bei der theoretischen Aesthetik mehrerer Variabeln sehen, wie sie experimentell kritisirt werden kann, aber jetzt leuchtet schon ein, dass man auch dann nie die Versuchsperson aus zwei oder mehreren Variabeln zu gleicher Zeit wählen lassen darf. Hat man bei der Methode der Wahl mit einer Variabele ausserdem die störenden Einflüsse, soviel wie möglich war, beseitigt, so bekommt man, wenn eine Versuchsperson da war, nur eine bestimmte Antwort. Man kennt dann experimentell das individuelle ästhetische Maximum der Versuchsperson betreffs dieser Gegenstände. Der Versuch lehrt nichts über die individuellen Grenzen oder ästhetische Gleichwerthigkeit. Liegt keine weitere Angabe vor, so müssen wir vom Standpunkte der Theorie aus ein solches Experiment als unvollständig von der theoretischen Vergleichung ausschliessen. Es geht dann wie bei der exacten Messung des Siedepunktes einer Flüssigkeit: die Zahl sagt nichts, wenn nicht zugleich die Barometerhöhe im Messungs Augenblicke beigegeben ist.

Besser steht es, wenn man viele Versuchspersonen gebraucht, aber dann muss sofort die Zahl von ihnen ziemlich gross sein, um befreit zu werden von den individuellen Abweichungen und um so ein Durchschnittsurtheil zu gewinnen. Man soll entweder das ästhetische Urtheil nur

eines Individuums studiren, oder das von einer Menge Versuchspersonen, sonst wird das Experiment einen Wirrwarr von Particularitäten und Allgemeingültigkeiten darbieten. Hat man, wie Fechner, eine genügend grosse Anzahl Versuchspersonen zur Verfügung, so wird die Methode der Wahl, wenn Jeder das ihm schönste Exemplar der vorgelegten Reihe auswählen darf, eine Vertheilung der personellen Maxima über die beurtheilten Gegenstände zum Vorschein bringen, welche Vertheilung dann procentisch umgerechnet werden kann. Die höchste Procentzahl weist das Durchschnittsmaximum der Menge auf. So fand Fechner bei der Beurtheilung von neun Ellipsen mit constanter Minorachse und einem annähernden Achsenverhältniss V durch 305 Versuchspersonen diese Procentzahlen:

V	$1/1$	$6/5$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	1,618	$7/4$	$2/1$	$5/2$
%	3,2	0,6	8,3	14,7	42,4	16,7	13,1	1,6	0

Die Ellipsen mit $V = 1/1$ und $V = 2/1$ sind als zwei für die Menge ästhetisch ungefähr gleichwerthige zu schätzen. Die übrigen Procentzahlen eignen sich weniger gut zur Schätzung ästhetischer Gleichwerthigkeit. Aber diese zwei genügen.

Die Methode der Wahl bedingt also eine Verfügung über eine grosse Anzahl Versuchspersonen, gibt als Resultat ein Durchschnittsurtheil und lässt die Gleichwerthigkeit nur abschätzen, aber nicht genau bestimmen.

§ 28. Die zweite, die Methode paarweiser Vergleichung, ist bis jetzt, sowie sie durch Witmer (l. c.) ausgebildet worden, die beste der ästhetischen Versuchsmethoden. Hat man eine in einer Variabele sich gleichmässig ändernde Reihe von n Gegenständen, so kann man von ihnen $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare bilden, und jeder Gegenstand erscheint also $(n-1)$ male. Jedes Paar (ab) wird der Versuchsperson absonderlich vorgelegt und gefragt, welchen von beiden Gegenständen sie schöner findet. Die Antwort kann dreierlei sein: a schöner als b ; b schöner als a ; a und b gleich schön. Witmer protocollirte die Urtheile sehr bequem also, dass er auf einer Horizontallinie und Vertikallinie eines papiernen Rechteckes der Reihe nach die Werthe der Variabele x , z B.: $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ notirte. War x_p

der x_n vorgezogen, so bekam die Stelle unter x_p und auf der Horizontallinie der x_n einen Index oder eine Notiz; war x_n der x_p vorgezogen, so bekam die Stelle unter x_n , und auf der Horizontallinie der x_p den Index.

	x_1	x_2	x_3	...		x_p				x_n
x_1										
x_2										
x_3										
x_p										
x_n										

Diese Tabelle im Texte gibt also an, dass x_2 der x_p dreimal und dass x_p der x_n einmal vorgezogen ist. Die Gleichheitsurtheile werden am besten absonderlich notirt.

Beseitigte man ausserdem die störenden Einflüsse soviel als möglich war, und hat man kein einziges Paar übergangen oder zuviel beurtheilen lassen, so bekommt man unter jedem Werthe der Variabele alle Vorzugsurtheile, welche auf diesen Werth gefallen sind. Man kann also von jedem Werthe der Variabele die totale Anzahl der Vorzugsurtheile ermitteln, und hierin liegt gerade die Vortrefflichkeit der Methode, weil sie nicht nur den relativen Schönheitswerth eines eventuellen Maximums angibt, aber von jedem Werthe der Variable bringt sie den relativen Schönheitswerth, ausgedrückt in der Anzahl der Vorzugsurtheile, zur Anschauung. Nur die äussersten Anzahlen der Vorzugsurtheile, welche den äussersten Gliedern der Reihe, also $x_1, x_2, \dots$ und x_{n-1}, x_n angehören, können nicht als Maasse der relativen Wohlgefälligkeit betrachtet werden, weil sie am meisten von den fehlenden Gliedern kleiner als x_1 und grösser als x_n , würden beeinflusst gewesen sein, falls sie da waren, und also jetzt bei deren Abwesenheit dem

verlangten Einflüsse nicht unterlagen. Man soll also die äussersten Anzahlen der Vorzugsurtheile nicht als genau mit der Wohlgefälligkeit des Reihengliedes correspondirend betrachten. Je ausgedehnter also die Reihe war, desto sicherer gibt die Anzahl der Vorzugsurtheile einen Maassstab für die Wohlgefälligkeit des betreffenden Reihengliedes. Später werden wir es streng beweisen.

War die Auswahl der Werthe der Variabele zutreffend und gibt der Versuch unzweideutig das Maximum an, so ist es klar, dass wir mit dieser Methode aus der gleichen Anzahl der Vorzugsurtheile zweier Specialwerthe der Variabele auf ihre ästhetische Gleichwerthigkeit schliessen können. Oft bekommen wir mehrere Paare ästhetisch gleichwerthiger Gegenstände.

Leuchtet das Maximum der Wohlgefälligkeit nicht unzweideutig aus dem Versuchesresultate hervor, so ist dreierlei möglich:

1. Die Vertheilung der Vorzugsurtheile ist ganz unregelmässig und verwirrt. Dann kann die gewählte Variabele eine nicht unabhängige sein und ist deshalb eine Function mehrerer Variabeln. Auch ist es möglich, dass die Beurtheilung des Gegenstandes zu mehreren ästhetischen Maxima Anleitung gibt. Die Möglichkeit davon haben wir schon gesehen bei der Ableitung der Principien der Symmetrie und der Asymmetrie. In derartigen Fällen ist es nothwendig, den Versuch mit eng einander folgenden Specialwerthen der Variabele zu wiederholen, um zu sehen, ob dann jedes Maximum deutlicher hervortritt.

2. Die Vertheilung der Vorzugsurtheile gibt einen Grund für die Vermuthung, dass mehrere Maxima anwesend sind. Auch hier verfährt man am besten, im grösseren Detail den Versuch zu wiederholen, um eine genaue Trennung der Maximagebiete zu erhalten.

3. Ein charakteristisches Maximum tritt nicht hervor in dem Sinne, dass keine Anzahl Vorzugsurtheile vorkommt, welche rechts und links neben sich immer kleiner werdende Anzahlen der Vorzugsurtheile hat. Es kommt vor, dass mit der Reihenfolge der Werthe der Variabele auch die Anzahlen der betreffenden Vorzugsurtheile gleichmässig zu- oder abnehmen. Erstens kann dann der Versuch nicht genügend

weit durchgeführt sein, aber zweitens ist es möglich und wird später auch theoretisch nachgewiesen, dass man mit einem unendlich weit abliegenden Maximum zu thun hat, was bei keinem Versuche erreichbar ist. Wir werden einem solchen Falle begegnen.

Diese möglichen Fälle sind bei der Methode paarweiser Vergleichung zu erwarten. Wir meinen, dass dies zu Gunsten der Methode sich herausstellt; denn, wie zeitraubend sie sein möge, sie hat den grossen Vorzug, oft mehr zu geben, als man frug; sie lehrt auch Neuem auf die Spur kommen.

§ 29. Fechner's sogenannter i-Versuch¹⁾. Methode der Wahl.

Experimentelles. Dieser Versuch ist aus Fechner's hinterlassenen Protocollen und Manuscripten durch die werthvollen Bemühungen Prof. Witmer's veröffentlicht. Witmer erwähnt es auf diese Weise:

»Auf einer weissen Tafel waren 12 Linien gezeichnet; die Dicke derselben betrug 0,5 mm und sie standen je 20 mm auseinander. Jede Linie hatte eine Länge von 32 mm und über derselben befand sich ein Punkt von 1 mm Durchmesser in folgenden verschiedenen Höhen:

a. 5,5 mm	d. 10,5 mm	g. 19,8 mm	k. 37,5 mm
b. 6,8 »	e. 12,9 »	h. 24,5 »	l. 46,4 »
c. 8,5 »	f. 16,0 »	i. 30,3 »	m. 57,4 »

Eine zweite weisse Tafel enthielt eine ähnliche Reihe: die Länge der Linien war hier ebenfalls constant, doch war dieselbe ebenso wie die Höhe des Punktes über der Linie zweimal so gross, wie bei den entsprechenden Figuren der ersten Tafel; die Dicke der Linien sowie der Durchmesser des Punktes war hingegen hier geringer«.

An dem Versuche nahmen 69 Personen Theil, welche 138 Urtheile aussprachen. Gesamtzahl der Male, dass die betreffende i als schönste ausgewählt wurde = z , procentisch = p . Die veränderliche Höhe bei der ersten Tafel geben wir an mit x . Das Resultat war:

1) Witmer l. c.

Nr.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m
x	5,5	6,8	8,5	10,5	12,9	16,0	19,8	24,5	30,3	37,5	46,4	57,4
z	0	2,5	8,5	24	41	43	17	1,5	0,5	0	0	0
p	0	1,8	6,1	17,3	29,7	31,1	12,3	1,0	0,3	0	0	0

Der Versuch brachte also heraus, dass zwischen e und f oder zwischen $x = 12,9$ und $x = 16$ die schönste i -Form lag. Um doch einigermaassen den Werth davon zu bestimmen, theilen wir den Abstand von e und f oder 3,1 durch einen Punkt y in zwei Stücke ey und yf derart, dass $ey : yf = 31,1 : 29,9$ und $ey + yf = 3,1$, woraus $ey = 1,58$ und der Punkt y den Werth $12,9 + 1,58 = 14,48$ bekommt. (Man sieht, dass ich eine Schwerpunkttheilung benutzte.) Wir können also die i -Form mit $x = 14,48$ als die experimentell schönste betrachten. Ausserdem gibt das Versuchsergebnis an, dass Nr. a und k als ein ästhetisch gleichwerthiges Paar annähernd zu betrachten sind.

Theoretisches. Die Discussion der unabhängigen Variabele bietet hier keine Schwierigkeiten. Was wir x nannten, war auch psychisch die Variabele.

Die zweite Frage: haben wir hier mit einer discontinuen oder continuen Mittelwerthsbildung zu thun, ist nicht so leicht zu beantworten. Ausser den vorgelegten i -Formen kannten die Versuchspersonen noch eine unendliche Menge aus ihrer Erfahrung und Phantasie, und dies würde für eine continue Mittelwerthsbildung sprechen, wenn nicht eine i -Form selbst als Figur ein Discontinuum wäre: eine Linie, eine leere Strecke, dann ein Punkt, und gerade das Discontinuitätsgebiet, die leere Strecke, ist die psychische Variabele x . Wir müssen also auf eine discontinue Mittelwerthsbildung schliessen.

Unsere theoretische Aufgabe ist also: das ästhetische Maximum zu bestimmen als Mittelwerth aus der Reihe von i , welche die Versuchspersonen kennen.

Nach dem Princip der ästhetischen Gleichwerthigkeit sind wir aber nicht gezwungen, die äussersten menschlichen Grenzen für diese Gegenstände zu kennen, wenn wir nur ein Paar ästhetisch gleichwerthige i -Formen zu bestimmen vermögen. Das ästhetische Maximum wird dann gefunden durch nur mathematisch, nicht psychisch, diese Formen des

ästhetisch gleichwerthigen Paares als äusserste menschliche Grenzen zu betrachten.

Der Versuch bot die i-Form Nr. a mit $x = 5,5$ und Nr. k mit $x = 37,5$ als ästhetisch gleichwerthiges Paar dar. Das theoretische Maximum x_m ist also $x_m = \sqrt{(5,5)(37,5)}$ oder $\log x_m = \frac{1}{2}(\log 5,5 + \log 37,5)$. Also $2 \log x_m = 2,31439$ und $\log x_m = 1,157195$ oder $x_m = 14,3613$. Experimentell war das Maximum 14,48. Der Unterschied ist sehr gering. Fechner's i-Versuch bestand aus zwei Reihen; in der zweiten war die constante Linie und die x zweimal grösser als in der ersten. Man sieht aber sofort ein, dass der Factor 2 auch den Mittelwerth zweimal grösser macht. Wir können also nach der ersten Reihe hinweisen.

Ich darf nicht unerwähnt lassen, dass Witmer¹⁾ den folgenden Versuch, leider ohne die vollständige Angabe aller Versuchszahlen, wodurch dieser und viele seiner Versuche von der theoretischen Vergleichung ausgeschlossen sind, also angekündigt hat:

»Reihe 7. Verhältniss einer Linie zu einer leeren Strecke in vertikaler Richtung — den i-Versuchen Fechner's entsprechend. Gesamtstrecke 60 mm; Länge der Linie 14 bis 58 mm; Zahl der Figuren 21; Zwischenintervall 2 mm«. Sein Versuchsergebniss war 1,872. Meine Bemerkung gilt: »den i-Versuchen Fechner's entsprechend«, denn ich kann ihm da keineswegs beistimmen. Bei Fechner war die Gesamtstrecke variabel, bei Witmer ist sie constant = 60 mm; bei Fechner war die sichtbare i-Linie constant = 32 mm; bei Witmer variirt sie von 14—58 mm. Man mag über einen derartigen Unterschied hinweggehen, weil es in beiden Fällen doch i-Versuche sind, aber ich bitte doch auch psychologisch die Begriffe von Variabilität und Constanz scharf zu trennen. Auch die Resultate sind ganz verschieden, was theilweise den anderen Versuchspersonen, aber auch der anderen Versuchsform zugeschrieben werden soll. Die folgenden Versuche sind ausschliesslich Beispiele einer continuen Mittelwerthsbildung. Darum, und um mit dem Leichtesten anzufangen, habe ich die i-Versuche vorangestellt.

1) l. c. Heft 2, Versuchsreihe 7.

§ 30. Fechner's Versuch mit zehn Rechtecken¹⁾.
Methode der Wahl.

Experimentelles. »Zehn Rechtecke aus weissem Carton von genau gleichem Flächeninhalt (6400 Quadratmillimeter) aber verschiedenem Seitenverhältniss wurden auf einer schwarzen Tafel ausgebreitet«. Im Ganzen wurden 592 Vorzugs- und Verwerfungsurtheile ausgesprochen. Das Verhältniss der Rechteckseiten ist mit v angegeben. Die Procentzahl p gibt procentisch die Anzahl der Male an, dass das betreffende Rechteck als schönstes ausgewählt wurde. Fechner gab diese Procentzahlen für männliche und weibliche Versuchspersonen gesondert; ich habe sie aber umgerechnet für Versuchspersonen überhaupt, weil es mir ungerechtfertigt erscheint, bei wissenschaftlichen Versuchen, wo es sich gar nicht um etwas Geschlechtliches handelt, doch eine solche willkürliche Trennung einzuführen. Das Versuchsergebniss war:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	$1/1$	$6/5$	$5/4$	$4/3$	$29/20$	$3/2$	$34/21$	$23/13$	$2/1$	$5/2$
p	3,05	0,245	1,535	2,665	8,6	19,775	35,165	19,315	8,095	1,555

Das schönste Seitenverhältniss war also experimentell $\frac{34}{21} = 1,619$. Ausserdem waren Nr. 5 mit $v_5 = \frac{29}{20}$ und

Nr. 9 mit $v_9 = \frac{2}{1}$ ein ästhetisch annähernd gleichwerthiges

Paar. Wir wählten nicht Nr. 3 und Nr. 10, weil Fechner's übrige Zahlen dieser scheinbaren Gleichwerthigkeit widersprechen.

Theoretisches. Die psychische Variabele ist hier v , und wir haben eine continue Mittelwerthsbildung. Also ist theoretisch v_m die schönste, wenn

$$v_m = \frac{v_9}{v_5} v = \frac{2}{1,45} v = 5 \frac{0,4}{0,29} v = \frac{5}{e} \left[\frac{0,4^{0,4}}{0,29^{0,29}} \right]^{\frac{1}{0,11}}.$$

Wir können durch die letzte Umformung die Tabelle am Ende dieser Abhandlung benutzen, denn

1) G. Th. Fechner, Vorschule der Aesthetik. Leipzig 1876. Breitkopf u. Härtel.

$$\log v_m = \log 5 - \log e + \frac{1}{0,11} \log 0,4^{0,4} - \frac{1}{0,11} \log 0,29^{0,29} =$$

$$= 0,23493 \dots \text{ oder } v_m = 1,7176.$$

Experimentell war $v_7 = 1,619$. Weil die Methode der Wahl nur annähernd genau ist und v_5 und v_9 auch nur annähernd gleich schön waren, ist die Uebereinstimmung genügend.

§ 31. Fechner's Versuch mit neun Ellipsen ¹⁾. Methode der Wahl.

Experimentelles. Witmer theilt aus Fechner's Nachlass Folgendes mit: »Zwei Reihen von Ellipsen waren aus weissem, resp. schwarzem Carton ausgeschnitten, mit der Hauptachse von constanter Länge; bei einer dritten Reihe aus weissem Carton blieb dagegen die kleinere Achse unverändert«. Witmer erwähnt nicht, ob die hinzugefügte Tabelle sich auf Ellipsen mit constanter Majorachse oder auf Ellipsen mit constanter Minorachse bezieht, was vielleicht aus den hinterlassenen Papieren Fechner's auch nicht zu bestimmen war. Hätte Fechner sie durcheinander gemischt, so müsste der ganze Versuch ausgeschlossen werden, denn dann wären zwei verschiedene unabhängige Variabele benutzt, ein Fehler, weswegen wir Fechner nicht verdächtigen mögen.

Weil die Constanz der Majorachse aus Witmer's Angabe nicht einwurfsfrei ist und auch die theoretischen Berechnungen mich dazu führten, in der gegebenen Tabelle nur das Versuchsergebnis der Ellipsen mit constanter Minorachse zu erblicken, theile ich nur diese Zahlen mit. Sie waren in Millimetern:

Minorachse = b	Majorachse = a	Verhältniss $v = \frac{a}{b}$
60	60	1,000
60,2	72,6	1,206
60	75,5	1,258
61	81	1,328
60	89,4	1,490
59,8	96,5	1,613

1) Witmer's Abhandlung l. c.

Minorachse = b Majorachse = a Verhältniss $v = \frac{a}{b}$

59	103,9	1,761
60,6	119,8	1,945
60,8	149,4	2,457

Die Ellipsen wurden entweder unregelmässig oder mit verticaler oder mit horizontaler Majorachse an 305 Versuchspersonen vorgelegt. Anzahl Urtheile = 305. Anzahl Male, dass die betreffende Ellipse als schönste auserwählt wurde, = z , procentisch = p . Das Resultat war:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	1,000	1,206	1,258	1,328	1,490	1,613	1,761	1,945	2,457
z	7	2	25,2	45,0	129,5	51	40	5	0
p	2,3 ¹⁾	0,6	8,3	14,7	42,4	16,7	13,1	1,6	0

Der Versuch gab an, dass Ellipse Nr. 5 mit $v_5 = 1,490$ die schönste war. Ausserdem waren Ellipse Nr. 1 mit $v_1 = 1,000$ und Nr. 8 mit $v_8 = 1,945$ annähernd ästhetisch gleichwerthig.

Theoretisches. Die Frage nach der psychischen Variabele tritt erstens hervor. Die Achse b war constant und a veränderlich. Aber die Achsen waren nicht gezeichnet und also auch keine directen psychischen Objecte. Die Versuchspersonen sahen weisse, ellipsenförmige Flächen und die veränderliche Ellipsenoberfläche ist also die psychische unabhängige Variabele. Was die Mittelwerthsbildung anbelangt, eine Ellipse ist ein Continuum, sie änderte sich gleichmässig und alle Zwischenformen lassen sich continuirlich dabei denken. Wir haben also hier continue Mittelwerthsbestimmung.

Ist die Ellipsenoberfläche = F , so ist $F = \pi ab$. Setzen wir $F_1 = \pi a_1 b$ und $F_8 = \pi a_8 b$, weil $b = \text{Constanz}$, so ist $v_1 = 1$ und $v_8 = 1,945$, $F = \pi ab = \pi b^2 v$, $F_1 = \pi b^2 v_1$, $F_8 = \pi b^2 v_8$. Die schönste Ellipsenoberfläche F_m ist also theoretisch durch folgende Integrationen zu bestimmen:

1) In Witmer's Angabe steht 1,2, ein Druckfehler.

$$F_m = \frac{F_8}{F_1} M F = \pi b^2 \frac{F_8/\pi b^2}{F_1/\pi b^2} M F = \pi b^2 \frac{v_8}{v_1} M F =$$

$$= \frac{\pi b^2}{e} \left[\frac{v_8^{v_8}}{v_1^{v_1}} \right]^{\frac{1}{v_8 - v_1}} = \frac{\pi b^2}{e} 1,945^{\frac{1,945}{0,945}}.$$

Setzen wir $\frac{1}{e} 1,945^{\frac{1,945}{0,945}} = v_m$, so ist $\log \log e v_m = \log 1,945 - \log 0,945 + \log \log 1,945$, was gibt $v_m = 1,447 \dots$ Experimentell war $v_5 = 1,490 \dots$ Die Uebereinstimmung ist genügend, da v_1 und v_8 nur annähernd ästhetisch gleichwerthig waren.

§ 32. Wir haben jetzt die Versuche, welche mit der Methode der Wahl ausgeführt waren, mit der Theorie verglichen. Waren die Uebereinstimmungen genügend, sie hätten besser sein können, wenn wir nicht mit der Methode der Wahl zu thun gehabt hätten. Ich wollte die Versuche, nach dieser Methode gemacht, nicht von vornherein ausschliessen, denn immer wird diese Methode doch ihr Recht als Näherungsmethode aufrecht halten können; aber es ist doch immer bedenklich, ob überhaupt die Methode der Wahl wohl etwas über ästhetische Gleichwerthigkeit ans Licht bringen kann. Für die Theorie kam es nur darauf an. Dieses Bedenken findet hierin seinen Grund, dass wir gezwungen waren, aus gleichen Summen von bevorzugten Schönheitsmaxima zur ästhetischen Gleichwerthigkeit der betreffenden Grössen zu schliessen. Dieses Verfahren wird immer bedenklicher, je nachdem man mit einer geringeren Anzahl Versuchspersonen zu thun hat. Die Methode paarweiser Vergleichung ist frei von diesem Bedenken: ein jedes Glied der Reihe spielt im ganzen Versuche dieselbe Rolle, und mir scheint sie, wenn sie consequent durchgeführt wird, auch die einzig exacte ästhetische Methode.

§ 33. Wir kommen jetzt zu den Versuchen Witmer's, welche er ursprünglich in der Absicht anstellte, die goldne Schnitt-Theilung experimentell zu controlliren. Wir wissen schon, was wir von dem goldnen Schnitt zu denken haben,

und der Zahlresultate nach werden diese Versuche auch wenig Interessantes liefern, ist doch ausserdem jedes ästhetische Urtheil persönlich. In der Psychologie aber darf man nicht nur Allgemeinem nachstreben, und streng genommen ist sie auch die Wissenschaft von jeder Persönlichkeit für sich. Das allgemein Gültige wird sich auch bei der individuellen Untersuchung hervorheben.

Die Versuche Witmer's an nur einer Versuchsperson zu gleicher Zeit angestellt mit der Methode paarweiser Vergleichung, bieten auch ein treffliches Mittel zur Controlle der Theorie. Zur Erklärung seiner Tabellen müssen wir nach § 28 hinweisen.

§ 34. Witmer's Versuch von 400 paarweisen Vergleichen mit 16 Rechtecken¹⁾. Majorseite = 50 mm = a = Constanz. Minorseite = b , variirt von 23—38 mm. Versuchsperson A.

Experimentelles. Das Versuchsergebniss war derart:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
b	23	24	25	26	27	28	29	30
Summe der Vorzugsurtheile	37	47	46	42	39	35	35	26
Summe der Verwerfungsurtheile	9	5	4	8	9	13	15	24
Summe der Gleichheitsurtheile	2				2			
Total	48	52	50	50	50	48	50	50
Nr.	9	10	11	12	13	14	15	16
b	31	32	33	34	35	36	37	38
Summe der Vorzugsurtheile	23	15	20	14	7	8	3	0
Summe der Verwerfungsurtheile	27	35	30	36	43	42	47	50
Summe der Gleichheitsurtheile								
Total	50	50	50	50	50	50	50	50

Aus den Vorzugsurtheilen sehen wir, dass ein Rechteck zwischen Nr. 2 und Nr. 3, also zwischen $b_2 = 24$ und $b_3 = 25$

1) Witmer's Abhandlung l. c.

der Versuchsperson A am schönsten war. Gleich schön waren annähernd Nr. 1 mit $b_1 = 23$ und Nr. 5 mit $b_5 = 27$.

Da $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ Paare oder ein Vielfaches davon vorgelegt werden könnte, so dass ein jedes Rechteck 15 Male oder dasselbe Vielfache davon erscheinen konnte, und ausserdem diese Regel gilt: Summe der Vorzugsurtheile + Summe der Verwerfungsurtheile + Summe der Gleichheitsurtheile desselben Gegenstandes $= p(n-1)$, so $p =$ Vielfach das genommen wurde, haben wir zur Controlle des Versuches diese Totalziffer berechnet. Nun ist $n-1 = 15$, aber weder 48 noch 50 noch 52 ist ein Vielfaches von 15. Ausserdem erschienen $\frac{798}{2} = 399$ Paare, wofür Witmer 400 angab.

Er aber sagt: »die Combination zu einem Paare geschah vollständig regellos«, und wir glauben darin auch die Abweichung von der consequenten Durchführung des Versuches erblicken zu müssen. Glücklicherweise ist die Constanz der Totalziffer genügend.

Theoretisches. Die psychische Variabele ist die Oberfläche $F = ab$, die Mittelwerthsbildung ist continue. Sei $F_5 = ab_5$, $F_1 = ab_1$ und $F_m = ab_m$, so ist, weil $a =$ Constanz und $b_1 = 23$ und $b_5 = 27$.

$$F_m = \frac{F_5}{F_1} MF = a \frac{F_5/a}{F_1/a} MF = a \frac{b_5}{b_1} MF = 100 a \frac{b_5/100}{b_1/100} MF = a \frac{100}{e} \left[\frac{0,27^{0,27}}{0,23^{0,23}} \right]^{\frac{1}{0,04}}.$$

Wir geben dem Integrale diese Gestalt zur Benutzung der Tabelle, denn nun ist

$$\log b_m = 2 + \frac{100}{4} \log 0,27^{0,27} - \frac{100}{4} \log 0,23^{0,23} - \log e = 1,39748 \text{ oder } b_m = 24,97.$$

Experimentell lag die schönste b zwischen 24 und 25. Die Uebereinstimmung ist gut.

§ 35. Witmer's Versuch von 400 paarweiser Vergleichen mit 16 Rechtecken. Majorseite $= a =$ Constanz; Minorseite $= b$, variirt von 23—38 mm. Versuchsperson M .

Experimentelles. Das Versuchsergebnis war derart:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>b</i>	23	24	25	26	27	28	29	30
Summe der Vorzugsurtheile	8	15	14	19	30	38	41	45
Summe der Verwerfungsurtheile	30	31	30	26	12	9	5	1
Summe der Gleichheitsurtheile	12	6	9	5	8	4	4	4
Total	50	52	53	50	50	51	50	50
Nr.	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>b</i>	31	32	33	34	35	36	37	38
Summe der Vorzugsurtheile	39	36	28	20	8	7	4	1
Summe der Verwerfungsurtheile	4	9	14	24	31	41	45	42
Summe der Gleichheitsurtheile	7	3	8	6	11	2	1	8
Total	50	48	50	50	50	50	50	51

Aus den Vorzugsurtheilen sehen wir, dass Rechteck Nr. 8 mit $b_8 = 30$ für M das schönste war. Gleich schön waren sehr annähernd Nr. 4 mit $b_4 = 26$ und Nr. 12 mit $b_{12} = 34$. Ich berücksichtigte Nr. 1 und Nr. 13 nicht, weil sich bei Nr. 1 die Gleichheitsurtheile sehr anhäufen und wir die äussersten Vorzugssummen ausschliessen müssen. Der Versuch ist auch hier nicht consequent durchgeführt, aber die Constanz der Totalziffer ist genügend. Beurtheilt sind $\frac{805}{2} = 402,5$ Paare, wofür Witmer 400 angibt. Woher doch die Liebe für die »runden Zahlen«?

Theoretisches. Die psychische Variabele ist die Oberfläche $F = ab$, die Mittelwerthsbildung ist continue. Gleichwerthig waren $b_4 = 26$ und $b_{12} = 34$. Also ist bei $a = \text{Constanz}$ und $F_m = ab_m$

$$F_m = \frac{F_{12}}{F_4} = 100 a \frac{b_{12/100}}{b_{4/100}} = a \frac{100 \left[0,34^{0,34} \right]^{\frac{1}{0,08}}}{e \left[0,26^{0,26} \right]} = ab_m.$$

Oder:

$$\log = b_m = 2 + \frac{100}{8} \log 0,34^{0,34} - \frac{100}{8} \log 0,26^{0,26} - \log e = \\ = 0,47583, \text{ also ist } b_m = 29,91.$$

Experimentell war $b_8 = 30$ die schönste. Die Uebereinstimmung ist gut.

§ 36. Diese zwei Versuche sind die beiden einzigen, welche Witmer derart veröffentlichte, dass wir sie zur Controlle der Theorie anwenden könnten. Ausserdem hat er noch zahlreiche Versuche ausgeführt, welche wir leider nicht benutzen können, da sie theilweise unvollständig in ihren Angaben, theilweise mit mehreren Versuchspersonen zu gleicher Zeit ausgeführt sind. Diese Theorie bedingt eine vollständige Mittheilung der Versuchszahlen und bei nur einer Versuchsperson.

Dieselbe Schwierigkeit haftet den Versuchen Cohn's an über die Gefühlsbetonung von Farben und Helligkeiten¹⁾. Alle seine Angaben sind Gesamtwerte von 5 à 8 Beobachtern. Hätte ich die Vergleichen seiner Versuche mit der Theorie veröffentlicht, so würde Manches zu Gunsten der Theorie auszufallen scheinen, aber dies bleibt nur Schein und nichtssagend, so lange in den Versuchen selbst Fehler stecken; denn Angaben von Vorzugsurtheilen als Gesamtwerte von einer Anzahl Beobachter sind als mit Fehlern behaftet zu betrachten. Die Aesthetik bedarf vollständige, streng individuelle Zifferangaben.

§ 37. Ich habe aber noch einige Bemerkungen zu machen über die Fragen, welche die theoretische Aesthetik bei der Controlle an Versuchen über Farben, Helligkeiten, Töne u. s. w. zu beantworten hat.

Zuvor die Art der psychischen Mittelwerthsbildung.

Wir haben bis jetzt ausschliesslich die geometrische angewendet, und sie scheint mir von allgemeiner Gültigkeit zu sein, so weit es fest steht, dass der menschliche Geist nur Verhältnisse beurtheilt. Voraussichtlich habe ich mich im Vorhergehenden nicht eingelassen mit einer psychischen Erklärung dieser geometrischen Mittelwerthsbildung und habe nur im Vorübergehen die Meinung ausgesprochen, dass wir vielleicht mit einer Art Superposition zu thun haben.

1) Phil. Stud. X.

Jetzt bin ich der Meinung nicht mehr, weil die Superposition schwierig zu einigen ist mit der Thatsache, dass der Geist jedes einzelne Ding unbeeinflusst von anderen Dingen derselben Art wieder ins Bewusstsein zurückzurufen vermag. Jedes einzelne Ding muss also gesondert im Gedächtnisse localisirt sein. Dann lässt sich die geometrische Mittelwerthsbildung betrachten als Folge eines geistigen Strebens, viele Dinge derselben Art zu gleicher Zeit im Bewusstsein zu haben als ein Ding. Wir können uns dies folgendermaassen begreiflich machen.

Sind z. B. im Gedächtnisse zwei Kreise localisirt mit Durchmessern a und b . Nun schreiben wir dem Geiste das Streben zu, beide Kreise zu gleicher Zeit im Bewusstsein zu haben als ein einziger Kreis. Lässt er nur a zu, so bleibt b ausgeschlossen, lässt er nur b zu, so bleibt a ausgeschlossen. Lässt er beide zu, so kommen zwei Kreise ins Bewusstsein und nicht ein einziger. Das einzig übrigbleibende ist, dass er keine der zwei zulässt und sie im Unbewussten bleiben lässt, sich aber in eine Art Relation mit ihnen setzt, so z. B., wie wir mit dem Auge nach zwei Dingen sehen können, ohne jedes der beiden scharf zu sehen. Betrachtet so der Geist im Unbewussten die zwei Kreise, so wird die Bildformung von a gehemmt werden durch die Anwesenheit von b , und die Bildformung von b wird gehemmt werden durch das Dasein von a . Die Hemmung von a durch b wird so sein, dass a grösser scheint, je nachdem b grösser ist, oder der scheinbar gesehene a_1 ist grösser, je nachdem b grösser ist, d. h. $\frac{a_1}{b} = k_1 = \text{Constanz}$. Desgleichen bei b ; der scheinbar gesehene b_1 ist grösser, je nachdem a grösser ist. Oder $\frac{b_1}{a} = k_2 = \text{Constanz}$. Dies gilt, wenn der menschliche Geist nur Verhältnisse beurtheilt. Also ist $a_1 = k_1 b$ und $b_1 = k_2 a$. Aber auch diese Scheinbilder a_1 und b_1 beeinflussen einander wieder, sodass sie a_{11} und b_{11} zu sein scheinen, derart, dass $\frac{a_{11}}{b_1} = k_3 = \text{Constanz}$ und $\frac{b_{11}}{a_1} = k_4 = \text{Constanz}$. So können wir weiter gehen, bis die beiderseitige Beeinflussung der Bilder unmöglich ist. Dies ist dann

unmöglich, wenn die Scheinbilder gleich geworden sind. Es beeinträchtigt die Allgemeingültigkeit des Beweises nicht, wenn wir denken, dass dieses Gleichsein der Scheinbilder schon bei a_{11} und b_{11} stattfindet. Dann ist also das Endbild x , entstanden unter der beiderseitigen Wirkung von a und b , aus der Gleichung $x = a_{11} = b_{11}$ zu finden. Aber $a_{11} = k_3 b_1$ und $b_{11} = k_4 a_1$, also ist $x^2 = a_{11} b_{11} = k_3 k_4 a_1 b_1 = k_1 k_2 k_3 k_4 a b$. Nun ist die Gleichung $x^2 = k_1 k_2 k_3 k_4 a b$ allgemeingültig, welchen Werth a und b haben. Wir können also das constante Product $k_1 k_2 k_3 k_4$ bestimmen, wenn wir $a = b$ denken. Dann ist von keiner Beeinflussung die Rede, weil dann nur ein Kreis da ist. Das Endbild ist nun auch $x = a = b$. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so folgt $k_1 k_2 k_3 k_4 = 1$. Also ist ganz allgemein das Endbild aus $x^2 = a b$ zu bestimmen, eine geometrische Mittelwerthsbildung.

Sind drei Kreise da, z. B. a , b und c , so beweist man die geometrische Mittelwerthsbildung als psychisches Resultat oder Endbild der gegenseitigen Beeinflussung der drei Bilder derart: sei a_1 das Scheinbild von a , wenn a beeinflusst wird von b und c , die auch einander beeinflussen, so

ist $\frac{a_1}{\sqrt{bc}} = k_1 = \text{Constanz}$, desgleichen $\frac{b_1}{\sqrt{ac}} = k_2$ und $\frac{c_1}{\sqrt{ab}} = k_3$.

Kann die gegenseitige Beeinflussung weitergehen und sei a_{11} das Scheinbild von a_1 unter dem Einflusse von b_1 und

c_1 , so ist $\frac{a_{11}}{\sqrt{b_1 c_1}} = k_4 = \text{Constanz}$, ebenso $\frac{b_{11}}{\sqrt{a_1 c_1}} = k_5$ und

$\frac{c_{11}}{\sqrt{a_1 b_1}} = k_6$ u. s. w., bis schliesslich die Beeinflussung un-

möglich geworden ist, weil z. B. $x = a_{11} = b_{11} = c_{11}$ das Endbild geworden ist. Dann ist also $x^3 = k_4 k_5 k_6 a_1 b_1 c_1 = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 a b c$. Dies gilt wieder allgemein, also auch, wenn $x = a = b$ ist. Daraus folgt aber $k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 = 1$. Also ganz allgemein ist $x^3 = a b c$. Ebenso für beliebig viele Grössen.

So haben wir deshalb die geometrische Mittelwerthsbildung interpretiren können als die Folge von dem Streben des Geistes, um Vieles in Eins zu gleicher Zeit anzuschauen. Bei den Versuchen ist es also angewiesen, mit der geome-

trischen Mittelwerthsbildung die Controlle der Theorie anzufangen.

Unsere Ableitung des geometrischen Mittelwerthes hat aber, so weit das Streben des Geistes nach Einigung des Mannigfaltigen zur Geltung kommt, eine allgemeinere Bedeutung als bloss eine ästhetische; wir werden uns aber hier auf diese beschränken.

§ 38. Die zweite Frage, welche bei ästhetischen Versuchen beantwortet werden soll, ist die nach der Form der psychisch unabhängigen Variabele. Dass Vieles darauf ankommt, wurde uns schon klar bei der Ableitung der Principien der Symmetrie und der Asymmetrie, wo zwei psychische Variablen möglich waren. Schwierig wird die Sache z. B. bei Farben. Die Wellenlänge ist nicht von allgemeiner psychischer Gültigkeit, denn für die Farbe Purpur lässt sich keine Wellenlänge bestimmen. Cohn benutzt den Farbenkreis, wo jede Farbenart einer bestimmten Bogenlänge entspricht und die complementären Farben nahezu diametral einander gegenüber stehen. Als psychische Variabele ist dann ein Mittelpunktswinkel zu nehmen. Aber auch Cohn¹⁾ betont es, wie roh dieser Farbenkreis der Wirklichkeit entspricht. Man kann also die Frage nach der Art der psychisch unabhängigen Variabele bei Farbentönen noch als eine offene betrachten. Vielleicht beantwortet eine Farbenanordnung auf einer Ellipse besser an den Anforderungen. Bei den Tönen ist die Schwingungszahl als psychische Variabele zu betrachten. Für ästhetische Untersuchungen ist die Bemerkung wichtig, dass wir in dem v. Helmholtz'schen Principe der Klangverwandtschaft, bestehend in der Coincidenz gemeinsamer Obertöne, kein ästhetisches Princip vor uns haben, sondern ein physiologisches. Man hat die zwei Begriffe von physiologischer Verträglichkeit und ästhetischer Wohlgefälligkeit scharf zu trennen. Die musikalische Harmonie verliert darum nicht ihre ästhetische Bedeutung. Denn da keine genaue ästhetische Schätzung stattfinden kann, wenn sich störende Einflüsse vorfinden, so wird auch keine musikalische ästhetische Geniessung möglich

1) Phil. Stud. X.

sein ohne genügende Beseitigung des Störenden, ohne dass der physiologischen Harmonie Genüge geleistet ist. Treffend sagt der grosse v. Helmholtz¹⁾: »Für die höhere geistige Schönheit der Musik sind Harmonie und Disharmonie nur Mittel, aber wesentliche und mächtige Mittel«. Leider liegen Versuche mit der Methode paarweiser Vergleichung nicht vor.

II. Theil:

Vom ästhetischen Modulus.

Die Wohlgefälligkeitscurven ästhetischer Proportionalitätsbeziehungen.

§ 39. Beurtheilen wir eine Reihe Gegenstände mit einer Variabele, so haben wir gezeigt, wie theoretisch aus einem Paar ästhetisch gleichwerthiger Elemente der Reihe das Maximum berechnet wird. Die ganze Theorie behauptete auch bis jetzt nichts Anderes als die Präcision dieses Maximums. Die Hypothese, dass der Mittelwerth die schönste Form repräsentirt, hat sich uns, durch die Versuche bestätigt, als zutreffend herausgestellt, und es ist wahrscheinlich, dass sie uns auch Näheres über den Werth der Wohlgefälligkeit anderer Elemente der Reihe lernen kann, obwohl mit Hülfe einer zweiten Hypothese, welche darzustellen jetzt unsere Aufgabe ist.

Schon bei der Begründung des Princips der ästhetischen Gleichwerthigkeit wurde es uns klar, wie in einer Reihe einer Variabele x , an jedem Specialwerthe x_p eine bestimmte Wohlgefälligkeit eigen ist. Sobald es uns möglich ist, von jedem Specialwerthe von x auch den dazu gehörigen Wohlgefälligkeitswerth zu ermitteln, können wir sie auf zwei rechtwinkligen Coordinatenachsen abtragen, auf die x -Achse den Werth der unabhängigen Variabele, auf die y -Achse die

1) v. Helmholtz, Vorträge und Reden. Braunschweig, Vieweg u. Sohn 1896. Man vergleiche damit den letzten Abschnitt von der Lehre der Tonempfindungen.

Wohlgefälligkeitswerthe. Gehört einer Abscisse x_p der Wohlgefälligkeitswerth als Ordinate y_p an, entweder experimentell oder theoretisch bestimmt, so ist der Punkt P mit den Coordinaten $x_p y_p$ ein Punkt der sogen. Wohlgefälligkeitscurve, welche angibt, wie sich die Wohlgefälligkeit mit dem Werthe der Variabele ändert.

§ 40. Unserer gebräuchlichen Eintheilung gemäss fangen wir mit der Erörterung der experimentellen Bestimmung der Wohlgefälligkeitswerthe an.

Wir haben die experimentellen Ergebnisse schon benutzt zur Bestimmung zweier ästhetisch gleichwerthiger Elemente, d. h. wir bestimmten aus den Procentzahlen der Wahl bei der Methode der Wahl und aus den Summen der Vorzugsurtheile bei der Methode paarweiser Vergleichung diejenigen Elemente der Reihe, welche einen ästhetisch gleichen Werth hatten, ohne damit zu behaupten, dass diese Zahlen zugleich den Verlauf der Wohlgefälligkeit angaben. Waren sie zutreffend, um die Gleichheit der Wohlgefälligkeit zu ermitteln, eine nähere Untersuchung muss uns lernen, wie weit sie auch dienen können, um das Steigen und Sinken der Wohlgefälligkeit mit der Aenderung der Variabele zu bestimmen. Dazu gehört mehr als die Gewissheit, dass eine ästhetische Gleichwerthigkeit angegeben wird; denn eine Gleichheit der Wohlgefälligkeit sagt nicht aus, wie gross die gleichen Wohlgefälligkeiten sind.

Eine Versuchsmethode kann in ihrem Resultat nur dann Wohlgefälligkeitswerthe angeben, sobald kein einziges Element der beurtheilten Reihe den anderen vorgezogen ist.

Die Methode der Wahl entspricht dieser Bedingung nicht, denn die Versuchsperson musste die für sie schönste Form auswählen und ein Element wurde deshalb immer allen anderen der Reihe vorgezogen. Die Methode der Wahl lehrt auch nichts über die einzelnen Wohlgefälligkeiten der Elemente der Reihe, sondern sie gibt nur die procentische Vertheilung der individuellen Maxima an. Ausserdem sind zahlreiche Versuchspersonen nöthig, und wären sie einmal zufällig Alle einstimmig in ihrer Wahl, so würde diese Methode nur ein Maximum geben und eine annähernde Schätzung der Gleichwerthigkeit wäre dann auch ausgeschlossen. Die

Curve, welche aus einem Versuche abgeleitet werden kann, entspricht denn auch der Gauss'schen Wahrscheinlichkeitscurve der Fehlervertheilung, denn durch die Menge der Versuchspersonen kamen natürliche Fehler zum Vorschein, da nicht Alle die richtige schönste Form auswählten. Hier sind also gewöhnliche physische Fehler gemacht worden bei der wiederholten Bestimmung des Maximums. Zur Bestimmung der Wohlgefälligkeitswerthe ist also die Methode der Wahl auch bei einer Menge Versuchspersonen unbrauchbar.

Die Methode paarweiser Vergleichung hilft uns glücklicherweise besser, sobald sie consequent durchgeführt ist. Jedes Element kommt dann zu seinem Rechte, erscheint gleichviel Male der Versuchsperson gegenüber wie alle anderen Elemente, und die Summen der Vorzugsurtheile sind zugleich Maasse der Wohlgefälligkeit des betreffenden Elementes, vorausgesetzt, dass man die äussersten Summen der Vorzugsurtheile bei Seite lässt, denn sie verdienen kein Vertrauen als Wohlgefälligkeitsmaasse, wie wir jetzt beweisen werden.

Beschränkt der Versuch sich auf die Reihe $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, von n Specialwerthen der Variabele x , so können daraus $\frac{1}{2} n(n-1)$ Paare gebildet werden. War aber noch ein $(n+1)^{\text{stes}}$ Element da, z. B. x_0 , so dass x_0 kleiner ist als x_1 , so würden auch noch die Paare

$$(x_0 x_1) \quad (x_0 x_2) \quad (x_0 x_3) \dots (x_0 x_{n-2}) \quad (x_0 x_{n-1}) \quad (x_0 x_n)$$

mit beurtheilt sein. Das Resultat dieser Beurtheilung fällt dann ungefähr so aus, wenn $<$ »weniger schön als« bezeichnet u. s. w.:

$$x_0 < x_1, x_0 < x_2, x_0 < x_3, \dots x_0 < x_{n-3}, x_0 = x_{n-2}, x_0 > x_{n-1}, x_0 > x_n.$$

Das Hinzutreten des Elementes x_0 beeinflusst also die Elemente am anderen Ende der Reihe und im Beispiele erfahren vorbei x_{n-3} die Elemente x_{n-2}, x_{n-1} und x_n einen ändernden Einfluss in ihren Summen von Vorzugsurtheilen. Hätte man die Gewissheit, dass fortwährend das Zeichen $<$ sich ergeben würde bei der Herbeiziehung der neuen Paare, so würden alle Summen der Vorzugsurtheile

nur um Eins erhöht sein. Durch die Umkehrung des Zeichens $<$ in $=$ und $>$ ändert sich aber die Summe der Vorzugsurtheile an dem Ende der Reihe, wo das hinzugefügte Glied nicht steht. Der ändernde Einfluss an den Enden der Reihe der nicht im Versuche aufgenommenen Glieder offenbart sich deshalb erst, sobald sich ein ihnen ästhetisch gleichwerthiges Glied in der Reihe schon vorfindet. Z. B. x_0 , die nicht aufgenommen war, hatte x_{n-2} als ästhetisch gleichwerthiges Glied, das wohl aufgenommen war.

Es ist nicht schwer, am Versuchsergebnisse nachzuweisen, wo die Summen der Vorzugsurtheile nicht genau genug sind als Maasse der Wohlgefälligkeit, denn die graphische Zeichnung der also experimentell gewonnenen Wohlgefälligkeitscurve bietet an den Enden der Curve auch die sonderbarsten Unregelmässigkeiten dar, und man soll also die Curve nur, so weit sie einen regelmässigen Verlauf hat, als experimentelle Wohlgefälligkeitscurve betrachten.

Die Vorzugsurtheile aus Witmer's Experiment § 35 ergeben also folgende Curvenpunkte, wovon wir die mit (*) bezeichneten äussersten Werthe ausschliessen werden als Maasse der Wohlgefälligkeit. x = beurtheilte Verhältnisse, y = Summe der betreffenden Vorzugsurtheile = Maass der Wohlgefälligkeit.

$x_1 = \frac{23}{50}$	$y_1 = 8^*$	$x_5 = \frac{27}{50}$	$y_5 = 30$
$x_2 = \frac{24}{50}$	$y_2 = 15^*$	$x_6 = \frac{28}{50}$	$y_6 = 38$
$x_3 = \frac{25}{50}$	$y_3 = 14^*$	$x_7 = \frac{29}{50}$	$y_7 = 41$
$x_4 = \frac{26}{50}$	$y_4 = 19$	$x_8 = \frac{30}{50}$	$y_8 = 45$
$x_9 = \frac{31}{50}$	$y_9 = 39$	$x_{13} = \frac{35}{50}$	$y_{13} = 8$
$x_{10} = \frac{32}{50}$	$y_{10} = 36$	$x_{14} = \frac{36}{50}$	$y_{14} = 7^*$
$x_{11} = \frac{33}{50}$	$y_{11} = 28$	$x_{15} = \frac{37}{50}$	$y_{15} = 4^*$
$x_{12} = \frac{34}{50}$	$y_{12} = 20$	$x_{16} = \frac{38}{50}$	$y_{16} = 1^*$

Wir bitten den Leser, sich selbst eine Graphik dieser Curve zu bilden. Es ergibt sich dann, dass die Curve ein Maximum der Wohlgefälligkeit zeigt und dass übrigens jedem bestimmten Wohlgefälligkeitswerthe zwei Werthe der Variabele entsprechen.

Hat man also eine experimentelle Wohlgefälligkeitscurve gewonnen, so sind doch die Wohlgefälligkeiten nur abgemessen als Anzahlen von Vorzugsurtheilen, und es ist klar, dass diese sehr abhängen von der Ausbreitung, welche man dem Versuche gegeben hat. Man würde die Wohlgefälligkeiten auch procentisch angeben können, indem man dem Maximum den Werth 100 % gibt, aber der Vorthail scheint mir illusorisch und irreführend. Ein absolutes Wohlgefälligkeitsmaass gibt es nicht, ist auch der Mensch nur auf der Bestimmung von Verhältnissen angelegt. Wir müssen uns deshalb begnügen mit den Vorzugszahlen, und dies genügt auch vollständig.

Soweit betreffs der experimentellen Wohlgefälligkeitscurven mit einem eigentlichen Maximum. Es gibt aber auch experimentelle Wohlgefälligkeitscurven ohne ein derartiges Maximum, wo wir sagen können, dass das Maximum bis ins Unendliche verschoben ist. Von einer Berechnung dieses Maximums ist dann keine Rede. Der folgende Versuch von Dr. Jonas Cohn¹⁾ wird uns ein derartiges Beispiel geben.

Es gilt einen Versuch über den ästhetischen Werth der Sättigungsgrade der Farbe Grün durch Zusatz von Schwarz.

Auf sieben kreisförmige Scheiben derselben grünen Farbe wurden schwarze Kreissectoren von einer Winkelgrösse 60°, 120°, 180°, 240°, 300° und 360° concentrisch aufgelegt, derart, dass die erste Scheibe keinen Zusatz oder einen von 0°, die zweite einen von 60° Schwarz erhielt u. s. w. Sie wurden in schneller Rotation den Versuchspersonen vorgehalten und nach der Methode paarweiser Vergleichung miteinander verglichen.

Leider ist der Versuch nicht ohne Bedenken, denn drei Versuchspersonen statt einer oder einer grossen Menge von ihnen wurden benutzt. Das Resultat ist aber noch ziemlich brauchbar. Es ergab sich:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Zusatz von Schwarz	0°	60°	120°	180°	240°	300°	360° <i>x</i>
Summe der Vorzugsurtheile	17	15,5	12	9	6	2	1,5 <i>y</i>

1) Dr. Jonas Cohn. Experimentelle Untersuchungen über die Gefühlsbetonung der Farben etc. Phil. Stud. X.

Nimmt man als psychisch unabhängige Variabele x den Winkel der schwarzen Sektoren, so bilden sie mit den Vorzugsurtheilen als Wohlgefälligkeitsmaassen y , sieben Punkte, die sehr nahe auf einer geraden Linie zu liegen scheinen.

Von ästhetisch gleichwerthigen Paaren ist hier keine Rede, immer wurde eine weniger gesättigte Farbe einer mehr gesättigten vorgezogen.

Ein eigentliches Maximum ist nicht da und wir haben also hier ein ausgezeichnetes Beispiel einer einwerthigen Wohlgefälligkeit, im Gegensatze zu der aus Witmer's Versuchen sich herausstellenden zweiwerthigen Wohlgefälligkeit, wo immer zwei Werthe der Variabele einem Wohlgefälligkeitswerthe entsprachen.

Wir werden jetzt zu zeigen haben, wie wir theoretisch die Curven bei zwei- und einwerthiger Wohlgefälligkeit zu bestimmen vermögen.

Theoretische Bestimmung der Wohlgefälligkeitscurven.

§ 41. Wir haben bei der Vergleichung der Versuche mit der Theorie gesehen, wie die Bestimmungen der Maxima hinauslaufen auf eine Formel $\overset{x_2}{M}x$, worin x_1 und x_2 zwei ästhetisch gleichwerthige Specialwerthe von x sind. Bestimmt man diesen Werth von x beim Maximum, so bekommt man

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}x = x_m.$$

Wir können nun eine Wohlgefälligkeitscurve betrachten als eine graphische Gestalt des Verlaufes von ästhetisch gleichwerthigen Paaren Specialwerthen der Variabele x , und dies führt dann zu der Frage: welches ist die mathematische Bedingung dafür, dass zwei Werthe k_1 und k_2 der Variabele x ästhetisch gleichwerthig oder gleich schön seien? Bei der Begründung des Principes der ästhetischen Gleichwerthigkeit stellte sich heraus, dass diese Bedingung ist:

$$\overset{k_1}{\underset{k_2}{M}}x = x_m. \quad \text{I.}$$

In dieser Gleichung sind also k_1 und k_2 in der gegebenen Abhängigkeit stehende veränderliche Werthe von x .

Wir können diese Bedingungsgleichung also umformen:

$$\frac{Mx}{k_1} = x_m = \frac{1}{e} \left[\frac{k_2^{k_2}}{k_1^{k_1}} \right]^{\frac{1}{k_2 - k_1}}$$

oder:

$$k_2^{k_2} = (ex_m)^{k_2 - k_1} k_1^{k_1}$$

oder:

$$\left(\frac{k_2}{ex_m} \right)^{k_2} = \left(\frac{k_1}{ex_m} \right)^{k_1}. \quad \text{II.}$$

Wir haben die Gleichung I deshalb so umgebildet, dass wir in II rechts und links vom Gleichheitszeichen dieselbe algebraische Function bekamen, sobald man einerseits k_1 für k_2 schreibt. Wir ziehen daraus den grossen Vorthail, dass jetzt die Bedingung der ästhetischen Gleichwerthigkeit so zu sagen explicit gegeben ist. Setzen wir:

$$\left(\frac{k_2}{ex_m} \right)^{k_2} = \left(\frac{k_1}{ex_m} \right)^{k_1} = \left(\frac{k}{ex_m} \right)^k,$$

so werden wir weiterhin $\left(\frac{k}{ex_m} \right)^k$ den Modulus der ästhetischen Gleichwerthigkeit von k , und die Gleichung, aus der er hervorgeht, die Modulargleichung nennen.

Wir können dann diesen Satz aussprechen:

Zwei Werthe, k_1 und k_2 , der Variabele x sind ästhetisch gleichwerthig oder gleich schön, sobald ihre Moduli gleich sind.

So oft ihre Moduli ungleich sind, sind sie auch ästhetisch ungleichwerthig oder ungleich schön.

Die Modulargleichung verdient eine genaue Betrachtung:

Ist $\left(\frac{x_2}{ex_m} \right)^{x_2} = \left(\frac{x_1}{ex_m} \right)^{x_1} = \left(\frac{x}{ex_m} \right)^x$, so kann auf zweierlei Art dieser Gleichung Genüge geleistet werden:

I. Entweder ist $x_2 = x_1 = x$ und alle ästhetisch gleichwerthigen Paare fallen fort, denn sie sind nur da, so lange $x_2 \geq x_1$ ist. Die Gleichheit der Specialwerthe x_1 und x_2 als Bedingung ihrer gleichen Wohlgefälligkeit sagt nichts weiteres als: in diesem Falle gibt es nur eine einwerthige Wohlgefälligkeit.

II. Oder $\left(\frac{x_2}{e x_m}\right)^{x_2} = \left(\frac{x_1}{e x_m}\right)^{x_1} = \left(\frac{x}{e x_m}\right)^x$ für $x_2 \geq x_1$, und es gibt deshalb nur so lange ästhetisch gleichwerthige Paare, als $\left(\frac{x}{e x_m}\right)^x$ eine zweiwerthige Function in x ist.

Nun sagten die Versuche mir unwiderleglich, dass sich ästhetisch gleichwerthige Paare darbieten, an dieser Theorie könnte ich auch nicht zweifeln, aber wo zuvor die Mathematik mir geholfen hatte, tiefer in die Aesthetik einzudringen, da würde jetzt die Aesthetik meine mathematische Erkenntniss fördern. Denn noch nie war mir in der Mathematik die Frage vorgekommen, ob $\left(\frac{x}{e x_m}\right)^x$ ein- oder zweiwerthig in x ist, und ich musste aus ästhetischen Gründen wohl schliessen, dass wenigstens für alle Verhältnisse oder für $0 < x < 1$ die Function $\left(\frac{x}{e x_m}\right)^x$ zweiwerthig in x ist.

Dies wurde bestätigt, denn $\left(\frac{x}{e x_m}\right)^x = \frac{x^x}{(e x_m)^x}$ und $(e x_m)^x$ ist einwerthig, so dass wir zu der Untersuchung der Function $y = x^x$ kommen, was zugleich bei x und y als rechtwinkelige Coordinaten die Gleichung einer transcendentalen Curve ist. Mir blieb nichts anderes übrig, als eine tabellarische Bestimmung von x^x zwischen $x = 0$ und $x = \infty$. Ich habe diese Tabelle dieser Abhandlung angefügt. Es ergab sich, dass x^x zwischen $x = 0$ und $x = 1$ zweiwerthig in x ist, was ein einfaches Beispiel sofort zeigt, denn $0,25^{0,25} = 0,5^{0,5}$. Zwischen $x = 1$ und $x = \infty$ ist x^x nur einwerthig für positive x . Wir können aber in der Aesthetik alle Verhältnisse zu denen zwischen Null und Eins zurückführen, sodass die Function gerade von genügender Zweiwerthigkeit ist. Ich bitte den Leser sehr, sich aus der Tabelle die Gestalt der Curve $y = x^x$, bei rechtwinkeligen Coordinatenachsen $O X$ und $O Y$ zu versinnlichen.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so finden wir:

I. Bei einwerthiger Wohlgefälligkeit ist die Modulargleichung $x_2 = x_1 = x$, und der Modulus der ästhetischen Gleichwerthigkeit ist dann gleich x .

II. Bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit ist die Modulargleichung $\left(\frac{x_2}{ex_m}\right)^{x_2} = \left(\frac{x_1}{ex_m}\right)^{x_1} = \left(\frac{x}{ex_m}\right)^x$ bei $x_2 \geq x_1$, und der Modulus ist dann gleich $\left(\frac{x}{ex_m}\right)^x$.

§ 42. Wir haben jetzt einen genügenden Einblick in die Eigenthümlichkeiten von dem Modulus und der Modulargleichung bekommen, um einen wichtigen Schritt weiter zu thun.

Wir wissen, dass gleiche Wohlgefälligkeit von zwei Specialwerthen von x mathematisch in die Gleichheit ihrer Moduli übergeht; wir wissen, dass ungleiche Wohlgefälligkeiten von zwei Specialwerthen von x mathematisch von dem Verschiedensein ihrer Moduli abhängen; wie aber der Wohlgefälligkeitswerth genau abhängt vom Modulus, das lässt sich von vornherein nicht sagen und kann nur hypothetisch gesetzt werden. Wir setzen deshalb als zweite Hypothese dieser Theorie die Aussage:

Der Wohlgefälligkeitswerth ist eine lineare Function von dem Modulus der ästhetischen Gleichwerthigkeit.

Sind die Wohlgefälligkeitswerthe mit y angegeben und die Variable mit x , so ist also nach dieser Hypothese

I. bei einwerthiger Wohlgefälligkeit
 $y + px + q = 0$ die Gleichung der einwerthigen Wohlgefälligkeitscurven;

II. bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit
 $y + p\left(\frac{x}{ex_m}\right)^x + q = 0$ die Gleichung der zweiwerthigen Wohlgefälligkeitscurven. p und q sind Constanten, welche wir später bestimmen werden.

Wir können die zweite Hypothese auch einfacher also aussprechen:

Die Wohlgefälligkeit ist proportional mit dem Modulus der ästhetischen Gleichwerthigkeit. Ich ziehe aber die erste Aussage als genauer vor.

Die Curve der einwerthigen Wohlgefälligkeit ist eine gerade Linie, die Wohlgefälligkeit ändert sich gleichmässig

mit der Variabele und ein eigentliches Maximum ist nicht da. Ein uneigentliches Maximum der Wohlgefälligkeit findet sich vor entweder bei dem grössten oder dem kleinsten Werthe der Variabele, der psychisch möglich ist. Ich glaube einer derartigen Abhängigkeit der Wohlgefälligkeit von der Variabele auch dort zu begegnen, wo es sich um das Erhabene handelt. Auch dann ist etwas je erhabener, desto grösser oder kleiner die psychische Variabele ist (§ 13). Die Curve der zweiwerthigen Wohlgefälligkeit ist transcendental in x . Die Wohlgefälligkeit y ist maximal, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$\text{Nun ist } \frac{dy}{dx} = -p \left(\frac{x}{e x_m} \right)^x \left(1 + l \frac{x}{e x_m} \right) = (y + q) l \frac{x}{x_m}.$$

Für $p > 0$ ist y also maximal, wenn $l \frac{x}{x_m} = 0 = l 1$ ist, oder für $x = x_m$, was stimmt.

§ 43. Die eingeführten Constanten p und q können nicht anders als aus den betreffenden Versuchen bestimmt werden, weil wir kein absolutes Maass für die Wohlgefälligkeit haben und ein jeder Versuch in den brauchbaren Anzahlen der Vorzugsurtheile auch ein anderes Maass darbietet. Wäre es ja möglich, eine psychische Wohlgefälligkeitseinheit aus anderen Ergebnissen herzuleiten, so hilft doch nichts, uns die Schwierigkeit zu beseitigen, dass wir über die Variabilität einer derartigen Einheit nichts wissen, dass wir kein Recht haben, irgend eine psychische Grösse für absolut constant zu halten, denn der Mensch ist fortwährend einer stetigen, wenn auch oft unmerklichen Veränderung unterworfen¹⁾.

Wir entnehmen deshalb jedem Versuche die geringste Anzahl Ziffern für die Bestimmung der Constanten und werden sehen, dass auch dann noch genug zur Controlle der Theorie übrig bleibt.

Bestimmen wir p und q für die Curve $y + px + q = 0$ bei dem Versuche von Cohn, § 40.

1) Man vergleiche: Ludw. Lange, Ueber das Maassprincip der Psychophysik. Phil. Stud. X.

Für $x = 120^0$ gibt das Experiment $y = 12$, also $12 + 120p + q = 0$.

Für $x = 180^0$ gibt das Experiment $y = 9$, also $9 + 180p + q = 0$.

Hieraus findet man $p = 0,05$ und $q = -18$. Die theoretische Wohlgefälligkeitscurve bei diesem Versuche ist also

$$y = 18 - 0,05x.$$

Vergleichen wir die experimentellen Curvenpunkte mit denen der theoretischen Wohlgefälligkeitscurve, so haben wir:

x	y experim.	y theor.
0^0	17	17,95
60^0	15,5	15
120^0	12	12*
180^0	9	9*
240^0	6	6
300^0	2	3
360^0	1,5	0

Die mit (*) bezeichneten Punkte sind benutzt worden zur Bestimmung von p und q . Die Uebereinstimmung ist genügend, war auch der Versuch nicht ohne Bedenken.

Wir hätten selbstverständlich auch zwei andere Curvenpunkte zur Bestimmung von p und q auswählen können. Dies hängt ab von einer Art Geschick zur besten Wahl. Dass ich das rechte Geschick dafür gezeigt habe, will ich aber keineswegs behaupten.

§ 44. Wir werden jetzt p und q bestimmen für die Curve $y + p \left(\frac{x}{e x_m} \right)^x + q = 0$ bei dem Versuche von Witmer, §§ 35 und 40.

Der Versuch brachte hervor, dass $x = \frac{26}{50}$ und $x = \frac{34}{50}$ sehr nahe ästhetisch gleichwerthig waren. Wir setzen deshalb ihre Wohlgefälligkeit gleich 19,5 als Mittel zwischen den 19 und 20 Vorzugsurtheilen. Dann ist also

$$x_m = \frac{1}{50} \overset{34}{M}_{26} x = \frac{29,9}{50} \quad (\S 35).$$

Ausserdem gab der Versuch bei $x = \frac{29}{50}$ eine $y = 41$. Wir haben also p und q zu bestimmen aus:

$$19,5 + p \left(\frac{26}{29,9 \cdot e} \right)^{\frac{26}{50}} + q = 0 \quad \text{und} \quad 41 + p \left(\frac{29}{29,9 \cdot e} \right)^{\frac{29}{50}} + q = 0.$$

Dass auch zu $x = \frac{34}{50}$ eine $y = 19,5$ gehört, ist schon angegeben bei der Bestimmung von x_m .

Man kann diese Gleichungen leicht logarithmisch vereinfachen und findet dann:

$$19,5 + 0,552741 \cdot p + q = 0 \quad \text{und} \quad 41 + 0,549949 \cdot p + q = 0.$$

Hieraus findet man $p = 7700,57$ und $q = -4275,93$.

Die Gleichung der Wohlgefälligkeitscurve für diesen Versuch ist also:

$$y + 7700,57 \left(\frac{50x}{29,9 \cdot e} \right)^x - 4275,93 = 0,$$

oder also geschrieben:

$$y = 4275,93 - \frac{7700,57 \cdot x^x}{1,62611^x}.$$

Berechnen wir hieraus einige theoretischen Wohlgefälligkeiten zur Vergleichung mit den experimentellen, so ergibt sich:

x	y experim.	y theor.	Die mit (*) bezeichneten sind benutzt worden zur Bestimmung von p , q und x_m . Die Uebereinstimmung ist sehr gut. Man bekommt aber einen besseren Ueberblick, wenn man eine graphische Zeichnung der theoretischen Curve macht und zugleich die experimentellen Punkte hineinträgt.
$\frac{26}{50}$	19	19,49*	
$\frac{27}{50}$	30	29,79	
$\frac{28}{50}$	38	36,92	
$\frac{29}{50}$	41	41,02*	
$\frac{30}{50}$	45	42,09	
$\frac{31}{50}$	39	40,55	
$\frac{32}{50}$	36	36,16	
$\frac{33}{50}$	28	29,12	
$\frac{34}{50}$	20	19,48*	
$\frac{35}{50}$	8	7,32	

Man soll sich aber keine Illusionen machen über die theoretische Curve, denn die Constanten p und q würden

ganz andere sein, wenn der Versuch mit mehreren Elementen gemacht worden wäre. Ausserdem sind die Constanten abhängig von der individuellen Eigenart. Die Vermehrung unserer positiven Erkenntniss besteht hier nur in der Bewährung der zweiten Hypothese dieser Theorie.

§ 45. Wir haben früher erkannt, dass zur Bestimmung des wohlgefälligsten Verhältnisses zwei Möglichkeiten sich darboten, welche wir als die Principien der Symmetrie und der Asymmetrie kennzeichneten. Die Versuche betrafen nur das Princip der Asymmetrie. Wir werden aber der Vollständigkeit halber auch die Wohlgefälligkeitscurve ableiten für das Princip der Symmetrie.

Hat man den Mittelwerth aus $y = \frac{c-x}{x}$ zu bestimmen, so führt dies mit y als psychische unabhängige Variabele zu dem Princip der Symmetrie.

Sei $M \frac{x_2}{x_1} \frac{c-x}{x} = y_m$, wo x_1 und x_2 ästhetisch gleichwerthig sind in Bezug auf y_m , so ist:

$$y_m = \frac{\frac{x_2}{x_1} M(c-x)}{Mx} = \frac{\frac{c-x_2}{x_2} Mx}{Mx}.$$

Die Modulargleichung ist also zu bestimmen aus:

$$y_m \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2-x_1}} = \frac{1}{e} \left[\frac{(c-x_2)^{c-x_2}}{(c-x_1)^{c-x_1}} \right]^{\frac{1}{x_1-x_2}}.$$

Sie ist also:

$$(y_m x_2)^{x_2} (c-x_2)^{c-x_2} = (y_m x_1)^{x_1} (c-x_1)^{c-x_1} = (y_m x)^x (c-x)^{c-x}.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet durch:

I. $x_2 = x_1 = x$, Modulus = x . Dies liefert die Curve $y + px + q = 0$ bei einwerthiger Wohlgefälligkeit.

II. $(y_m x_2)^{x_2} (c-x_2)^{c-x_2} = (y_m x_1)^{x_1} (c-x_1)^{c-x_1} = (y_m x)^x (c-x)^{c-x}$ für $x_1 \geq x_2$, Modulus = $(y_m x)^x (c-x)^{c-x}$. Dies liefert die Curve $y + p(y_m x)^x (c-x)^{c-x} + q = 0$ bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit.

Wir werden aber, da die Versuche noch fehlen, von weiteren Bestimmungen absehen müssen.

§ 46. Schliesslich noch ein Wort über die Wohlgefälligkeitsvertheilung bei der discontinuen Mittelwerthsbildung. Streng genommen kann dort von keiner Wohlgefälligkeitscurve die Rede sein, denn diese Curve setzt die Continuität voraus.

Wir können aber wohl die Curve bestimmen, worauf die Punkte liegen, deren Lage die Wohlgefälligkeit der discreten Specialwerthe der Variabele angibt. Sind x_1 und x_2 ästhetisch gleichwerthig bei discontinuer Mittelwerthsbildung, so ist $x_1 x_2 = x_m^2$, als x_m die schönste x angibt. Also ist $x_1 = \frac{x_m^2}{x_2}$ und $\frac{x_m^2}{x_1} = x_2$. Die Modulargleichung ist also:

$$x_1 + \frac{x_m^2}{x_1} = x_2 + \frac{x_m^2}{x_2} = x + \frac{x_m^2}{x},$$

denn aus $x_1 + \frac{x_m^2}{x_1} = x_2 + \frac{x_m^2}{x_2}$ folgt:

$$x_2 x_1^2 + x_2 x_m^2 = x_1 x_2^2 + x_1 x_m^2 \text{ oder } x_1 x_2 (x_1 - x_2) = x_m^2 (x_1 - x_2).$$

Dieser Modulargleichung wird Genüge geleistet durch:

I. $x_2 = x_1 = x$. Modulus = x . Dies gibt die Curve $y + px + q = 0$ bei einwerthiger Wohlgefälligkeit.

II. $x_2 + \frac{x_m^2}{x_2} = x_1 + \frac{x_m^2}{x_1} = x + \frac{x_m^2}{x}$ für $x_2 \geq x_1$. Modulus = $x + \frac{x_m^2}{x}$. Dies gibt die Curve $y + p \left(x + \frac{x_m^2}{x} \right) + q = 0$ bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit, also ein Kegelschnitt, für $p \geq 0$ eine Hyperbel.

Versuche mit der Methode paarweiser Vergleichung liegen nicht vor.

Beziehung der Wohlgefälligkeit zur Wahrscheinlichkeit
ästhetischer Fehler.

§ 47. Wie bei jeder Messung kann auch eine ästhetische Messung oder Schätzung mehr oder weniger fehlerhaft sein. Wird ein ästhetischer Fehler gemacht, so betrachtet man deshalb eine von der schönsten abweichende Form als die wirklich schönste. Nach dieser Theorie ist die wirklich schönste Form der geometrische Mittelwerth aller psychisch gegebenen Formen derselben Art. Dieser Mittelwerth ist aber nur im unbewussten Theile unseres Geistes da, wir schauen ihn nicht direct an, und die Möglichkeit ist also vorhanden, dass wir bei der Bestimmung der schönsten Form einer Reihe nicht genau diesen Mittelwerth sinnlich angeben können. Wir machen dann einen ästhetischen Fehler, welcher einer der vielen anderen psychischen Fehler ist, die der Mensch schätzend, urtheilend, meinend macht.

Für die Aesthetik thut sich nun dieses wichtige Problem vor: welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mensch einen gegebenen ästhetischen Fehler macht? Oder also ausgesprochen: welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mensch ein gegebenes Ding einer Reihe für das schönste hält?

Schon ohne Rücksicht auf eine Theorie vom Schönen finden wir es von vornherein selbstverständlich, dass für zwei gleich schöne Dinge auch dieselbe Wahrscheinlichkeit besteht, um für das Schönste gehalten zu werden. Wir können diesen Satz als eine Erfahrungsthatsache betrachten, und es wird dann zu Gunsten dieser Theorie ausfallen, so sie im Stande ist, dies streng zu beweisen.

Bevor wir aber zur Lösung dieses Problems übergehen, ist es nothwendig, klar zu machen, dass wir hier das Gauss'sche Fehlergesetz nicht anwenden können. Gauss gründete seine Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers auf die Hypothese, dass der wahrscheinlichste Werth einer mit gleicher Sorgfalt wiederholt gemessenen Grösse durch den arithmetischen Mittelwerth der Messungen angegeben wird.

Bevor man also das Gauss'sche Fehlergesetz anwendet, soll man wenigstens klar gemacht haben, dass seine Hypothese als zutreffend betrachtet werden kann.

Lassen wir es mit einem Beispiele verdeutlichen. Ich sage einer Versuchsperson, mir ein Stück gerade Linie AB durch einen Punkt C aufs schönste in zwei ungleiche Stücke zu theilen. Nachdem sie es gethan, sage ich es noch einmal, und so weiter, viele Hunderte Theilungen der Linie AB , natürlich stets bei einer ganz frischen Linie, bitte ich sie mir anzudeuten. Hiernach messe ich diese Theilungen und bekomme so ein System Werthe, welche die eine Versuchsperson für die schönste Theilung der Linie hält, denn selbstverständlich ist jedesmal ein Fehler gemacht. Wie aber sind die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler vertheilt? Nach dem Gauss'schen Gesetze? Aber gar nicht. Denn bei jeder Theilung hat die Versuchsperson gemeint, das richtig Schönste anzugeben und hielt also ein vom Schönsten abweichendes Verhältniss für das richtige, für das schönste. Jedes Verhältniss aber, in dem eine Linie getheilt werden kann, ist als ein mögliches fehlerhaft Schönstes zu betrachten, obgleich für jedes eine andere Wahrscheinlichkeit besteht, und es ist dann nach dieser Theorie wohl sehr natürlich, dass der geometrische Mittelwerth aus allen diesen fehlerhaften Theilungen, d. h. aus allen möglichen Verhältnissen, auch den wahrscheinlichsten Werth darstellt.

Nun denke ich mir ein anderes Problem: Ich habe mehrere Hunderte Versuchspersonen zur Verfügung und sage jeder nur einmal, mir die Linie AB aufs schönste in zwei ungleiche Stücke zu theilen. Sie machen natürlich Alle Fehler, aber wie sind die Fehler jetzt vertheilt? Natürlich jetzt hauptsächlich nach dem Gauss'schen Gesetze, denn in den Hunderten von Versuchspersonen kamen die Spielungen der Natur zuvörderst zum Vorschein, da ein jeder Mensch durch seine Erfahrung ästhetisch anders veranlagt ist als ein anderer, und nur untergeordnet erscheinen die ästhetischen, die psychischen Fehler.

Wir treffen etwas derartiges an z. B. bei der Methode der Wahl mit mehreren Versuchspersonen; wir haben dann hauptsächlich natürliche Fehler, wofür das Gauss'sche Gesetz gilt.

Es ist also jetzt Sache, zu untersuchen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine gegebene Grösse für die schönste gehalten wird bei der Hypothese, dass der

geometrische Mittelwerth der Messungen die grösste Wahrscheinlichkeit hat, um als Schönstes betrachtet zu werden.

§ 48. Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit können wir die Gauss'sche Methode theilweise anwenden. Sind $x_1, x_2, \dots x_n$ die Messungen oder die Specialwerthe der Variable x und ist $x_m = (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ der geometrische Mittelwerth, so sind $\xi_1 = x_1 - x_m, \xi_2 = x_2 - x_m$ bis $\xi_n = x_n - x_m$ die ästhetischen Fehler. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Fehler ξ gemacht wird, ist dann $y = \varphi(\xi)$ zu setzen, welche unbekannte Function wir nun bestimmen werden.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass die ästhetischen Fehler $\xi_1 \dots \xi_n$ gemacht werden, sind also

$$y_1 = \varphi(\xi_1) \quad y_2 = \varphi(\xi_2) \dots y_n = \varphi(\xi_n).$$

Die Wahrscheinlichkeit K , dass dieses System von ästhetischen Fehlern gemacht wird, ist deshalb

$$\begin{aligned} K = y_1 y_2 \dots y_n &= \varphi(\xi_1) \cdot \varphi(\xi_2) \dots \varphi(\xi_n) \\ &= \varphi(x_1 - x_m) \cdot \varphi(x_2 - x_m) \dots \varphi(x_n - x_m). \end{aligned}$$

Nach unserer Hypothese wird K maximal für

$$x_m = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}};$$

also ist nach einer logarithmischen Differentiation

$$\frac{\varphi'(x_1 - x_m)}{\varphi(x_1 - x_m)} + \frac{\varphi'(x_2 - x_m)}{\varphi(x_2 - x_m)} + \dots + \frac{\varphi'(x_n - x_m)}{\varphi(x_n - x_m)} = 0, \quad 1)$$

und gleichzeitig ist

$$\log \frac{x_1}{x_m} + \log \frac{x_2}{x_m} + \dots + \log \frac{x_n}{x_m} = 0. \quad 2)$$

Da nun die $x_1 \dots x_n$ voneinander unabhängig sind, können die Gleichungen 1) und 2) nur gleichzeitig bestehen, wenn

$$\frac{\varphi'(x - x_m)}{\varphi(x - x_m)} = c l \frac{x}{x_m},$$

wo c eine Constante ist.

Wenn wir nun weiterhin $x - x_m$ als ästhetischen Fehler ansehen wollen, müssen wir x_m als constant betrachten, denn psychisch kann nicht eher von einem ästhetischen Fehler die Rede sein, als wenn x_m schon im Geiste einen festen Werth angenommen hat.

Setzen wir also $x - x_m = \xi$, so ist, bei $x_m = \text{constant}$,

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = cl \frac{\xi + x_m}{x_m}.$$

Nun ist $y = \varphi(\xi)$ und also $\frac{1}{y} \frac{dy}{d\xi} = cl \frac{\xi + x_m}{x_m}$ oder $\frac{dy}{y} = cl \frac{\xi + x_m}{x_m} d\xi$. Integriren wir diese Gleichung, so ist

$$ly = c \int l \frac{\xi + x_m}{x_m} d\xi + c_1 = cx_m \int l \frac{\xi + x_m}{x_m} d \frac{\xi + x_m}{x_m} + c_1.$$

Dies gibt

$$ly = cx_m \frac{\xi + x_m}{x_m} l \frac{\xi + x_m}{x_m} - cx_m \frac{\xi + x_m}{x_m} + c_1.$$

oder

$$\begin{aligned} y &= e^{c(\xi + x_m) l \frac{\xi + x_m}{x_m} - c(\xi + x_m) + c_1} = \left(\frac{\xi + x_m}{ex_m} \right)^{c(\xi + x_m)} \cdot e^{c_1} = \\ &= k \left(\frac{\xi + x_m}{ex_m} \right)^{c(\xi + x_m)} \end{aligned}$$

für $e^{c_1} = k$. Die Wahrscheinlichkeit y für einen ästhetischen Fehler ξ wird also angegeben durch

$$y = k \left(\frac{\xi + x_m}{ex_m} \right)^{c(\xi + x_m)}$$

wo k und c zwei Constanten sind, welche wir hier nicht näher zu bestimmen haben.

§ 49. Weil $x_1 = \xi_1 + x_m$ und $x_2 = \xi_2 + x_m$ und $\left(\frac{x}{ex_m} \right)^x = \mu_x = \text{Modulus der ästhetischen Gleichwerthigkeit}$

von x ist, so können wir die Wahrscheinlichkeit y auch so schreiben:

$$y = k \left(\frac{x}{e x_m} \right)^{c x} = k \mu_x^c.$$

Sind nun zwei ästhetische Fehler ξ_1 und ξ_2 gemacht, so besteht für sie dieselbe Wahrscheinlichkeit, wenn

$$k \left(\frac{x_1}{e x_m} \right)^{c x_1} = k \left(\frac{x_2}{e x_m} \right)^{c x_2}$$

oder wenn $\mu_{x_1} = \mu_{x_2}$, d. h.: zwei ästhetische Fehler haben dieselbe Wahrscheinlichkeit des Eintreffens, wenn sie zu zwei gleich schönen Formen der Reihe gehören. Oder so ausgesprochen, sagt dieses Theorem:

Für zwei gleich schöne Formen einer Reihe besteht auch dieselbe Wahrscheinlichkeit, dass sie für die Schönste gehalten werden.

Unsere Theorie ist also im Stande gewesen, diesen psychischen Erfahrungssatz zu beweisen.

Combinatorische Schönheit.

§ 50. Bis jetzt haben wir nur die analytische Schönheit betrachtet, weil sie nur zu Mittelwerthsbestimmungen mit einer unabhängigen Variabele führt.

Sobald aber von einer combinatorischen Schönheit (§ 11) die Rede ist, haben wir mit Mittelwerthen aus mehreren Variabelen zu thun. Es liegen noch keine genauen Versuche in dieser Richtung vor und ich glaube deshalb die mathematischen Entwicklungen bis aufs Nothwendigste einschränken zu können. Es wurde mir nämlich klar, dass die Mathematik hier Näheres über die Versuchsanordnung bei mehreren Variabelen sagen könnte.

Wir beschränken uns auf zwei unabhängige Variabelen x und y bei continuer Mittelwerthsbildung. Haben wir dann mit einer Function $F(xy)$ zu thun, so geben wir mit dem Symbole $\overset{x_2 y_2}{M} F(xy)$ den geometrischen Mittelwerth an von allen Werthen, welche $F(xy)$ annehmen kann bei der

Änderung von x zwischen x_1 und x_2 und von y zwischen y_1 und y_2 . Es ist dann ganz analog wie bei einer Variabele:

$$\overset{x_2 y_2}{\underset{x_1 y_1}{M}} F(xy) = \exp. \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} l F(xy) dx dy.$$

Nun ist dies auch so zu schreiben:

$$\begin{aligned} \overset{x_2 y_2}{\underset{x_1 y_1}{M}} F(xy) &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx_1 \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} l F(xy) dy = \\ &= \exp. \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot l \left[\overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} F(xy) \right]_{x=\text{Const.}} = \overset{x_2}{\underset{x_1}{M}} \overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} F(xy), \end{aligned}$$

wenn wir verabreden, mit dieser letzten Symbolisation zu meinen, dass zuvörderst in $\overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} F(xy)$ die x constant gehalten wird, und erst wenn diese Operation beendigt ist und der Operator $\overset{x_2}{\underset{x_1}{M}}$ anfängt, die x veränderlich gedacht wird. Also ist:

$$\overset{x_2 y_2}{\underset{x_1 y_1}{M}} F(xy) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{M}} \overset{y_2}{\underset{y_1}{M}} F(xy).$$

Wir lernen also: Will man einen Mittelwerth aus Functionen (Reihen von Dingen) mit zwei Variabelen theoretisch (oder experimentell) bestimmen, so bestimme man erst den Mittelwerth (die schönste Form), wenn eine dieser Variabelen constant gehalten wird, und bestimme dann durch in diesem Mittelwerthe (in dieser schönsten Form) die andere Variabele zu ändern, den Mittelwerth der zwei Variabelen (die combinatorische schönste Form). D. h.: man soll die Versuche so einrichten, dass man nur mit einer Variabele zu gleicher Zeit zu thun hat.

Ein Beispiel wird dies vielleicht deutlicher machen: man will bei einer Versuchsperson die schönste Kreuzform von zwei senkrecht aufeinander liegenden geraden Linien bestimmen. Wir haben dann ein Problem mit zwei unabhängigen Variabelen $x =$ Länge des Längsbalkens und $y =$ Länge des Querbalkens. Jedes Kreuz ist dann eine Function von x und y (vielleicht hier von $\frac{x}{y}$). Man wählt natürlich

die Methode paarweiser Vergleichung und fängt mit der Anfertigung einer Reihe Kreuzformen mit constanter y_p und mit Längsbalken, die eine Reihe $x_1, x_2, \dots x_n$ bilden, an. So bekommt man die Kreuze

$$(x_1 y_p), (x_2 y_p), \dots (x_n y_p). \quad (\text{Erste Versuchsreihe})$$

Man kann dann durch paarweise Vergleichung die schönste Kreuzform bestimmen und zugleich die ästhetisch gleichwerthige, ganz ähnlich wie bei einer Variabele. Sei die experimentell schönste Kreuzform $(x_s y_p)$, so bilde man zweitens mit x_s als constanten Längsbalken und mit y als variablen Querbalken die Reihe Kreuzformen:

$$(x_s y_1), (x_s y_2), \dots (x_s y_n) \quad (\text{Zweite Versuchsreihe})$$

und bestimmt durch paarweise Vergleichung die schönste Kreuzform und die ästhetisch gleichwerthige, wie zuvor. Sei die experimentell schönste Kreuzform dieser Versuchsreihe $(x_s y_{s'})$, so ist die Kreuzform $(x_s y_{s'})$ das experimentell bestimmte, combinatorisch-schönste Kreuz.

Die theoretische Bestimmung macht man nun derart: zuvörderst soll die Function der Variablen x und y bestimmt werden. Da der Geist Alles mit Verhältnissen zu bestimmen scheint, würde man voraussetzen können, dass die Function $\frac{x}{y}$ ist.

Weil man anfang, mit $y = y_p$ in der ersten Versuchsreihe zu setzen, so bestimmt man auch theoretisch $\frac{x_q}{x_r} \frac{x}{y_p} = \frac{1}{y_p} \frac{x_q}{x_r}$, als x_r und x_q ästhetische gleichwerthige x -

Werthe aus der ersten Versuchsreihe sind. Dies gibt theoretisch

$$\frac{1}{y_p} \frac{x_q}{x_r} = \frac{x'_s}{y_p}.$$

Zweitens bestimmt man dann

$$\frac{y_n}{y_k} \frac{x'_s}{y} = x'_s \frac{y_n}{y_k} \frac{1}{y} = \frac{x'_s}{y'_{s'}}.$$

Theoretisch erhält man also $\frac{x'_s}{y'_{s'}}$, welchen Werth man

vergleichen kann mit $\frac{x_s}{y_{s'}}$. Man kann aber den Versuch auch umkehren und mit einer Versuchsreihe mit constanter x und variablen y anfangen. So kann man zwei verschiedene combinatorisch-schönste Formen erhalten. Theoretisch hängt dies ab von der Umkehrbarkeit der Integrationsfolge.

§ 51. Wohlgefälligkeitsflächen.

Es ist klar, dass wir bei Functionen zweier Variablen die Aenderungen der Wohlgefälligkeit z mit Specialwerthen von x und y graphisch durch Flächen bei rechtwinkligen Coordinatenachsen im Raume abbilden können.

a. Die experimentelle Bestimmung dieser Flächen kann derart geschehen:

1. Man bestimmt die experimentelle Wohlgefälligkeitscurve der Versuchsreihe $(x_1 y_1), (x_2 y_1), \dots (x_n y_1)$, zweitens die Curve der Versuchsreihe $(x_1 y_2), (x_2 y_2), \dots (x_n y_2)$ u. s. w., bis schliesslich die Curve der Versuchsreihe $(x_1 y_n), (x_2 y_n), \dots (x_n y_n)$. Zeichnet man diese n Curven auf den parallelen Ebenen, die erste auf der Ebene $y = y_1$, die zweite auf der Ebene $y = y_2$ u. s. w., so bekommt man eine Reihe paralleler Durchschnitte durch eine Wohlgefälligkeitsfläche, welche dann auch vorstellbar abgebildet ist.

2. Bei umgekehrter Versuchsanordnung hat man aber die experimentellen Wohlgefälligkeitscurven aus diesen Versuchsreihen zu bestimmen: $(x_1 y_1), (x_1 y_2), \dots (x_1 y_n)$ und aus $(x_2 y_1), (x_2 y_2), \dots (x_2 y_n)$ u. s. w., bis schliesslich aus $(x_n y_1), (x_n y_2), \dots (x_n y_n)$. Zeichnet man diese n Curven auf n parallelen Ebenen, die erste Curve auf der Ebene $x = x_1$, die zweite auf der Ebene $x = x_2$ u. s. w., so bekommt man hier eine Reihe Durchschnittscurven einer zweiten Wohlgefälligkeitsfläche, denn im Allgemeinen ist es nicht nothwendig, dass diese zwei Flächen dieselben sind. Experimentell erhält man also zwei Wohlgefälligkeitsflächen.

b. Theoretische Bestimmung der Wohlgefälligkeitsflächen.

Denken wir einen Augenblick nicht an die zwei Flächen, welche die Versuche uns darbieten, und fangen wir an, streng theoretisch die Gleichung der Wohlgefälligkeitsflächen zu bestimmen, ähnlich wie bei einer Variabele.

Im gewählten Beispiele war zu bestimmen $\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = \frac{x_m}{y_m}$.

Die Integrationsgrenzen sind constant, die Function ist continue zwischen diesen positiven Grenzen und deshalb ist

$$\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = \frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} \frac{x}{y} = \frac{x_m}{y_m}.$$

Oder:

$$\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = \frac{y_2}{y_1} \frac{1}{y} \frac{x_2}{x_1} Mx = \frac{1}{e} \left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \frac{y_2}{y_1} \frac{1}{y} = \frac{x_m}{y_m}.$$

Also ist:

$$\frac{\left[\frac{x_2^{x_2}}{x_1^{x_1}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}}}{\left[\frac{y_2^{y_2}}{y_1^{y_1}} \right]^{\frac{1}{y_2 - y_1}}} = \frac{x_m}{y_m}.$$

Können wir von dieser Gleichung auch eine Modulargleichung von zwei Variabelen bilden? D. h.: ist es möglich, diese Gleichung so in eine Form zu bringen, dass wir rechts und links vom Gleichheitszeichen zwei gleiche Functionen, eine in x_2 und y_2 und eine in x_1 und y_1 bekommen? Man bemerkt, dass dies hier nicht möglich ist, und im Allgemeinen besteht für diesen Fall deshalb keine einzelne Wohlgefälligkeitsfläche, sondern wenigstens zwei, wenn es möglich ist, für constante x eine Modulargleichung in y zu bilden und bei constanter y eine in x . Wir werden dies also noch untersuchen.

I. Ist y constant, so ist

$$\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = \frac{1}{y} \frac{x_2}{x_1} Mx = \frac{x_m}{y_m}, \text{ oder } \frac{x_2}{x_1} Mx = y \frac{x_m}{y_m}.$$

Also ist

$$\left(\frac{y_m x_2}{e x_m y} \right)^{x_2} = \left(\frac{y_m x_1}{e x_m y} \right)^{x_1} = \left(\frac{y_m x}{e x_m y} \right)^x = \text{Modulargleichung.}$$

Die Wohlgefälligkeitsflächen sind also:

a. $z + p \left(\frac{y_m x}{e x_m y} \right)^x + q = 0$ bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit.

b. $z + px + q = 0$ bei einwerthiger Wohlgefälligkeit, also eine Ebene parallel der y -Achse.

II. Ist x constant, so ist

$$\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = x \frac{y_2}{y_1} \frac{1}{y} = \frac{x_m}{y_m}, \text{ oder } \frac{y_2}{y_1} M y = x \frac{y_m}{x_m}.$$

Also ist

$$\left(\frac{x_m y_2}{e y_m x} \right)^{y_2} = \left(\frac{x_m y_1}{e y_m x} \right)^{y_1} = \left(\frac{x_m y}{e y_m x} \right)^y = \text{Modulargleichung.}$$

Die Wohlgefälligkeitsflächen sind also:

a. $z + p \left(\frac{x_m y}{e y_m x} \right)^y + q = 0$ bei zweiwerthiger Wohlgefälligkeit.

b. $z + py + q = 0$ bei einwerthiger Wohlgefälligkeit, also eine Ebene der x -Achse parallel.

§ 52. Wir wählten der Einfachheit wegen das Beispiel der Function $\frac{x}{y}$, damit wir etwas über die Probleme bei zwei Variabelen sagen konnten. Es leuchtet aber ein, dass die ganze Auseinandersetzung im Grunde nichts weiter war, als eine Wiederholung von Problemen mit einer Variabele, aber nacheinander ausgeführt. Dies war möglich, weil

$$\frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} \frac{x}{y} = \frac{\overset{x_2}{M} x}{\overset{y_2}{M} y}$$

ist. Hat man aber z. B. zu bestimmen, $\overset{y_2 x_2}{M}_{y_1 x_1} (y + x)$, so wird

das Problem durch $\overset{y_2 x_2}{M}_{y_1 x_1} (y + x) = \overset{y_2}{M}_{y_1} \overset{x_2}{M}_{x_1} (y + x)$ wohl zurückgeführt zu zwei Problemen mit einer Variabele, aber auch die Function ändert sich nach der Operation $\overset{x_2}{M}_{x_1}$ erheblich.

Denn:

$$\overset{y_2}{M}_{y_1} \overset{x_2}{M}_{x_1} (y + x) = \overset{y_2}{M}_{y_1} \overset{y+x_2}{M}_{y+x_1} x = \overset{y_2}{M}_{y_1} \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{(y + x_2)^{(y+x_2)}}{(y + x_1)^{(y+x_1)}} \right]^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \right\}.$$

Diese letzte Integration lässt sich nun wieder erheblich vereinfachen durch die Benutzung dieser zwei leicht zu beweisenden Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{x_2}{x_1} M x^x = e^{-\frac{x_1+x_2}{4}} \left[\frac{x_2^2}{x_1^2} \right]^{\frac{1}{2(x_2-x_1)}}$$

und

$$\text{II. } \frac{x_2}{x_1} M(ax+b)^{(ax+b)} = \frac{ax_2+b}{ax_1+b} M x^x.$$

Man findet dann:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 x_2}{y_1 x_1} M(y+x) &= \frac{y_2}{y_1} \left\{ \frac{1}{e} \left[\frac{(y+x_2)^{(y+x_2)}}{(y+x_1)^{(y+x_1)}} \right]^{\frac{1}{x_2-x_1}} \right\} = \frac{1}{e} \left[\frac{\frac{y_2}{y_1} M(y+x_2)^{(y+x_2)} \frac{1}{x_2-x_1}}{\frac{y_2}{y_1} M(y+x_1)^{(y+x_1)}} \right] = \\ &= \frac{1}{e} \left[\frac{\frac{y_2+x_2}{y_1+x_2} M y^y}{\frac{y_2+x_1}{y_1+x_1} M y^y} \right]^{\frac{1}{x_2-x_1}} = e^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{(y_2+x_2)^{(y_2+x_2)^2} \cdot (y_1+x_1)^{(y_1+x_1)^2}}{(y_1+x_2)^{(y_1+x_2)^2} \cdot (y_2+x_1)^{(y_2+x_1)^2}} \right]^{\frac{1}{2(y_2-y_1)(x_2-x_1)}}. \end{aligned}$$

Dies genügt, um zu zeigen, zu welchen umständlichen Rechnungen schon die einfachsten Functionen führen können. Ausserdem nimmt nicht nur bei mehreren Variabelen die Weitläufigkeit der Rechnungen noch mehr zu, aber auch die Geduld des Experimentators, der correspondirende Versuche ausführen will, würde eine bewunderungswürdige, aber fast übermenschliche Ausdauer haben müssen. Ich selbst habe voraussichtlich meine Versuche nicht veröffentlicht, weil der immer persönliche Character aller ästhetischen Urtheile eine genaue Controlle ausschliesst und ich nur streng Controllirbares geben wollte.

III. Theil:

Von der Aenderung der Schönheitsideale.

Die Wiederholung der Thatsachen.

§ 53. Wir haben uns im Vorhergehenden nicht bemüht mit der Bestimmung der Aenderung, welche die Wiederholung einzelner Thatsachen auf die Mittelwerthe ausübt. Es ist möglich, dass die Repetition eines Elementes einer Reihe psychischer Grössen einen erheblichen Einfluss auf den Mittelwerth hat. Wir werden dies deshalb noch zu untersuchen haben. Wir können uns dabei auf eine Variable beschränken, weil doch auch bei der combinatorischen Schönheit die Probleme zu denen mit einer Variable reducirt wurden.

I. Die Wiederholung bei discontinuier Mittelwerthsbildung im Allgemeinen.

Sind gegeben n discrete Werthe $x_1 \dots x_n$ der Variable x , und ist $m(x)$ das Symbol ihres geometrischen Mittel-

werthes, so ist $m(x) = [x_1 \cdot x_2 \dots x_{n-1} \cdot x_n]^{\frac{1}{n}}$.

Denken wir uns, dass x_p nun t mal wiederholt wird und setzen wir für den daraus hervorgehenden Mittelwerth das Symbol $[m(x)]_{x_p}^t$, so ist

$$[m(x)]_{x_p}^t = [x_1 \cdot x_2 \dots x_p^t \dots x_n]^{\frac{1}{n+t-1}},$$

oder

$$[m(x)]_{x_p}^t = [x_1 \cdot x_2 \dots x_n] x_p^{t-1} = x_p^{t-1} [m(x)]^n.$$

Oder

$$[m(x)]_{x_p}^{1+\frac{t}{n}-\frac{1}{n}} = x_p^{\frac{t}{n}-\frac{1}{n}} \cdot m(x) \quad 1)$$

Sind t und n miteinander vergleichbar und nicht sehr gross, so ändert sich deshalb der Mittelwerth nach dieser Formel. In der Wirklichkeit tritt dies nicht oft hervor, und nur bei Kindern. Denn in den Kinderjahren eines Menschen sind n und t noch endlich und miteinander ver-

gleichbar. Dann wird sich deshalb das Schönheitsmaximum fortwährend ändern, und nur wenn n sehr gross geworden ist und gleich unendlich gesetzt werden kann, haben wir mit einer möglichen continuen Mittelwerthsbildung zu thun. Dies tritt nur bei reichlicher Erfahrung ein. Es gibt im Anfang aller Erfahrung nur discontinue Mittelwerthsbildung, welche also durch die Wiederholung zu sehr veränderlichen Schönheitsmaxima führt. Wie wechseln denn auch nicht die Schönheitsideale der Kinder!

II. Die Wiederholung bei continuer Mittelwerthsbildung im Allgemeinen.

Sei $\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{smallmatrix} \right]_{x_p}^t$ das Symbol des geometrischen Mittelwerthes

aus allen Werthen, welche $F(x)$ hat, zwischen $F(x_1)$ und $F(x_2)$, wenn $F(x_p)$ für $x_2 > x_p > x_1$ darin t mal wiederholt ist, dann haben wir:

$$\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{smallmatrix} \right]_{x_p}^t = \text{Lim.} [F(x_1) \cdot F(x_1 + \Delta x) \dots (F(x_p))^t \dots F(x_1 + (n-1)\Delta x)]^{\frac{1}{n+t-1}}.$$

Wir theilten also den Unterschied $x_2 - x_1$ in $n + t - 1$ gleiche Stücke, so dass $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n + t - 1}$.

Nehmen wir beiderseitig den natürlichen Logarithmus, so ist:

$$l \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{smallmatrix} \right]_{x_p}^t = \text{Lim.} \frac{1}{n+t-1} \{ (t-1) l F(x_p) + l F(x_1) + l F(x_1 + \Delta x) + \dots + l F(x_p) + \dots + l F(x_1 + (n-1)\Delta x) \}.$$

Oder:

$$l \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{smallmatrix} \right]_{x_p}^t = \text{Lim.} \left\{ \frac{t-1}{n+t-1} l F(x_p) + \frac{\Delta x}{x_2 - x_1} \sum_{x=x_1}^{x=x_1+(n-1)\Delta x} l F(x) \right\} \quad 2)$$

Aber $x_1 + (n-1)\Delta x = x_2 - t\Delta x$ und

$$\frac{t-1}{n+t-1} = \frac{(t-1)\Delta x}{x_2 - x_1},$$

so dass

$$l \left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{matrix} \begin{matrix} M \\ F(x) \end{matrix} \right]_t = \text{Lim.} \left\{ \frac{(t-1)\Delta x}{x_2 - x_1} l F(x_p) + \frac{\Delta x}{x_2 - x_1} \sum_{x=x_1}^{x=x_2-t\Delta x} l F(x) \right\}. \quad 3)$$

Wir benutzen nun die Formeln 1), 2) und 3) für die folgenden wichtigen Specialisirungen. Weil n beim erwachsenen Menschen stets sehr gross ist und gleich unendlich gesetzt werden kann, haben wir nur die sehr grosse n mit t zu vergleichen.

a. $n =$ sehr gross und unvergleichlich viele Male grösser als t . D. h. mathematisch $n = \infty$, $t =$ endlich.

1. Bei discontinuer Mittelwerthsbildung gibt Formel 1)

$$\left(\frac{t}{n} = 0 \text{ und } \frac{1}{n} = 0 \right)$$

$$\left[\begin{matrix} m(x) \\ x_p \end{matrix} \right]_t = m(x)$$

2. Bei continuer Mittelwerthsbildung gibt Formel 3)

$$(\Delta x = 0)$$

$$\left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{matrix} \begin{matrix} M \\ F(x) \end{matrix} \right]_t = \begin{matrix} x_2 \\ x_1 \end{matrix} M F(x).$$

Wir lernen also: Bei viel umfassender Erfahrung hat eine endliche Wiederholung keinen Einfluss auf das Schönheitsmaximum. Haben wir also eine genügend ausgebreitete Erfahrung, so haben wir deshalb nicht zu befürchten, dass eine kleine einseitige Wiederholung unsere Schönheitsmaxima beeinflussen wird.

b. $n =$ sehr gross, aber vergleichlich gross mit t , die auch sehr gross ist. Wir können dann sehr bequem das Einseitigkeitsmaass $= k = \frac{t}{n}$ einführen. k ist dann fürs Gewöhnliche endlich. Führen wir k ein, so wird

1. Bei discontinuer Mittelwerthsbildung aus 1)

$$\left[\begin{matrix} m(x) \\ x_p \end{matrix} \right]_t^{1+k} = x_p^k \cdot m(x) \quad \text{oder} \quad \left[\begin{matrix} m(x) \\ x_p \end{matrix} \right]_t = \left[x_p^k \cdot m(x) \right]_t^{\frac{1}{1+k}}$$

2. Bei continuer Mittelwerthsbildung aus 2), weil

$$\left[\frac{t-1}{n+t-1} \right]_{n=\infty}^{t=\infty} = \left[\frac{nk-1}{n+kn-1} \right]_{n=\infty} = \frac{k}{k+1}$$

und

$$\left[x_1 + (n-1) \Delta x \right]_{n=\infty}^{\Delta x=0} = \left[x_1 + \frac{(n-1)(x_2-x_1)}{n+kn-1} \right]_{n=\infty} = \frac{x_2+kx_1}{k+1}$$

also:

$$l \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{smallmatrix} M F(x) \right]_t = \frac{k}{k+1} l F(x_p) + \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{\frac{x_2+kx_1}{k+1}} l F(x) dx. \quad 4)$$

Oder:

$$l \left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{smallmatrix} M F(x) \right]_t = \frac{k}{k+1} l F(x_p) + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{x_2-x_1} \int_{\frac{x_1+kx_1}{k+1}}^{\frac{x_2+kx_1}{k+1}} l F(x) dx.$$

Oder:

$$\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{smallmatrix} M F(x) \right]_t = \left\{ [F(x_p)]^k \cdot \begin{smallmatrix} \frac{x_2+kx_1}{k+1} \\ \frac{x_1+kx_1}{k+1} \end{smallmatrix} M F(x) \right\}^{\frac{1}{k+1}}.$$

Wir lernen also: Bei vielumfassender, aber zugleich grosser einseitiger Erfahrung ändert sich das Schönheitsmaximum in die Richtung der Einseitigkeit.

Wird die Einseitigkeit so weit getrieben, dass t selbst unendlich gross gegenüber n ist und also $k = \infty$ wird, so finden wir aus 4)

$$\left[\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p \end{smallmatrix} M F(x) \right]_{\infty} = F(x_p).$$

Also: bei unendlich weit geschnittener Einseitigkeit wird das Schönheitsmaximum gleich dem Einseitigkeitsobjecte.

Weil im gewöhnlichen Leben und beim gesunden Menschen t meistens unvergleichlich klein bleibt gegen n , und also, da $k = 0$, von keiner beträchtlichen Einseitigkeit die Rede ist, so befinden wir uns denn auch meistens im Falle a), und wir hatten Recht bei der vorhergegangenen Controlle

der Versuche den Einfluss der Wiederholung nicht zu berücksichtigen.

Wir können aber noch einen wichtigen Schluss ziehen: der Mittelwerth, das Schönste, ist standhaft einer endlichen Wiederholung gegenüber. Das Schönste steht über uns mit einer relativen Constanz, welche weniger von einer absoluten abweicht, je nachdem wir mehr Verschiedenes erfahren haben.

Lassen wir uns vor dem Neuen nicht verschliessen!

§ 54. Wir wollen schliesslich das Problem noch etwas verallgemeinern, damit wir noch ein wichtiges Princip ableiten können.

Denken wir uns in der Reihe $F(x_1), F(x_1 + \Delta x) \dots$ bis $F(x_2)$ wird $F(x_p)$ t mal, $F(x_q)$ v mal und $F(x_r)$ w mal wiederholt, so werden wir den Mittelwerth daraus mit

$$\left[\begin{matrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{matrix} \right]_{x_p | x_q | x_r}^{t | v | w} \text{ angeben, und es ist dann}$$

$$\left[\begin{matrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{matrix} \right]_{x_p | x_q | x_r}^{t | v | w (n+t+v+w-3)} = \text{Lim. } [F(x_1) \cdot F(x_1 + \Delta x) \dots (F(x_p))^t \dots (F(x_q))^v \dots (F(x_r))^w \dots F(x_1 + (n-1)\Delta x)] .$$

Wir theilten den Unterschied $x_2 - x_1$ in $n + t + v + w - 3$ gleiche Stücke, so dass $\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{n + t + v + w - 3}$. Nehmen wir beiderseitig den natürlichen Logarithmus, so ist

$$l \left[\begin{matrix} x_2 \\ M F(x) \\ x_1 \end{matrix} \right]_{x_p | x_q | x_r}^{t | v | w} = \text{Lim. } \frac{1}{n + t + v + w - 3} \left\{ (t-1) l F(x_p) + (v-1) l F(x_q) + (w-1) l F(x_r) + \sum_{x=x_1}^{x=x_1+(n-1)\Delta x} l F(x) \right\} .$$

Nun ist

$$[x_1 + (n-1)\Delta x]_{n=\infty}^{\Delta x=0} = \left[x_1 + \frac{(n-1)(x_2 - x_1)}{n + t + v + w - 3} \right]_{n=\infty} = \frac{x_2 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1}{k_1 + k_2 + k_3 + 1}$$

wenn $\frac{t}{n} = k_1, \frac{v}{n} = k_2, \frac{w}{n} = k_3$ die drei Einseitigkeitsmaasse sind bei $n = \infty$ oder $\Delta x = 0$.

Also ist:

$$l \left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p | x_q | x_r \end{matrix} \overline{MF}(x) \right]_{t|v|w} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + 1} l F(x_p) + \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3 + 1} l F(x_q) + \\ + \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3 + 1} l F(x_r) + \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{\frac{x_2 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1}{k_1 + k_2 + k_3 + 1}} l F(x) \cdot dx. \quad 5)$$

Sind nun die Wiederholungen endlich oder klein im Ver-
gleiche mit n , so folgt aus 5), da dann $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ist:

$$\left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p | x_q | x_r \end{matrix} \overline{MF}(x) \right]_{t|v|w} = \overline{MF}(x)_{x_1}.$$

Sind aber die Wiederholungen sehr gross und selbst n
weit übersteigend, so dass $k_1 = k_2 = k_3 = \infty$ gesetzt werden
kann, so folgt aus 5):

$$l \left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p | x_q | x_r \end{matrix} \overline{MF}(x) \right]_{\infty | \infty | \infty} = \frac{1}{3} l F(x_p) + \frac{1}{3} l F(x_q) + \frac{1}{3} l F(x_r).$$

Oder:

$$\left[\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \\ x_p | x_q | x_r \end{matrix} \overline{MF}(x) \right]_{\infty | \infty | \infty} = [F(x_p) \cdot F(x_q) \cdot F(x_r)]^{\frac{1}{3}}.$$

Wir kommen dann also zurück auf die gewöhnliche
Mittelwerthsbildung, aber der einseitig bevorzugten Functions-
werthe. Hätten wir alle Functionswerthe von $F(x_1)$ bis
 $F(x_2)$ einseitig bis ins Uebergrosse bevorzugen lassen, so
hätten wir den gewöhnlichen Mittelwerth wieder bekommen,
denn aus dieser discontinuen Mittelwerthsbildung folgt bei
wachsender Gliederzahl schliesslich die continue.

Was lernen wir also hier? Denken wir uns, ein Mensch
hat ein sehr langes Leben auf der Erde. Als Kind beginnt
er, die Welt zu sehen, sein unbewusstes Innere bildet sich
Mittelwerthe, rasch wechselnde Schönheitsideale daraus.
Bald aber hat er schon so viel Verschiedenes gesehen, auch
eines selben Dinges, dass die relative Constanz seiner Schön-
heitsideale sich ihm offenbart; es ist ihm, als ob eine trans-
scendente Unabänderlichkeit seinen Idealen eigen ist. Aber

seine Erfahrung, obwohl vielumfassend, setzt ihm Grenzen; er ist oft im Leben genöthigt, vielmals dasselbe zu sehen, zu hören, zu fühlen. Die Einseitigkeit fängt an, seine Schönheitsmeinungen nach der Richtung der Einseitigkeit zu beeinflussen. Soweit geht er, dass er selbst seine eigenen wiederholten Erlebnisse und Meinungen zu den schönsten und besten proclamirt. Doch die Welt hört niemals auf, neue Eindrücke wiederholt zuzuführen, und wenn der Mensch noch eindrucksfähig genug ist, wird seine Einseitigkeit sich auch auf andere Objecte richten können; seine Schönheitsideale hängen dann nur ab von diesen Einseitigkeiten. Breitet nun die Einseitigkeit sich wieder über allen Objecte aus und ändert sie sich zur Vielseitigkeit, so kommen die ursprünglichen Schönheitsideale seiner Jugend wieder zurück und der ganze Process fängt von Neuem an.

Wir haben alle diese successiven Stadien aus den Formeln abgelesen und lernen also hier das Princip der Periodicität der Schönheitsideale kennen. Es kommt wohl vor, dass man im kurzen Leben in sich diese Periodicität seiner Schönheitsideale zu constatiren vermag.

Die mathematische Schwierigkeit, die man vielleicht einwenden kann, dass in $\frac{t}{n} = k$ damit $k = \infty$ werde bei $n = \infty$, die Anzahl der Wiederholungen t von der Dimension ∞^2 sein muss, lässt sich bald beseitigen, wenn man bemerkt, dass n bei dem menschlichen Geiste schon gleich ∞ gesetzt werden kann, so $\frac{\Delta x}{x}$ kleiner als die relative Unterschieds-

schwelle der betreffenden Grösse ist. Sei z. B. $\frac{\Delta x}{x}$ kleiner als 1%, so darf n nur grösser als 100 sein, und also soll der Unterschied $x_2 - x_1$ in 100 gleiche Stücke getheilt werden, damit man im Geiste schon continue Uebergänge fühlt. Dann aber muss t nur grösser als 100^2 sein, um eine bis ins Unendliche fortgeschrittene Einseitigkeit zu zeigen. Aber eine zehntausendfache Wiederholung eines selben Dinges ist mehrmals im Leben zu erreichen. Sieht man ein Ding täglich einmal, so hat man es in 28 Jahren schon mehr als zehntausendmal gesehen. Glücklicher Weise

geht es so mit den meisten Dingen unserer Erfahrung, sonst würden wir der widerwärtigsten Einseitigkeit anheimfallen und meinen, dass unsere Ideale eine Richtschnur für alle Menschen sind.

§ 55. Am Ende dieser Abhandlung werden wir noch einmal die wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie zusammenfassen.

Die Schönheit ist die Folge einer unbewussten, aber mathematisch genau bestimmbaren Thätigkeit unseres Geistes. Die ästhetischen Thatsachen werden erklärt aus der Hypothese, dass diese Thätigkeit eine Mittelwerthsbildung ist. Aus der Vergleichung mit brauchbaren Versuchen, sowie aus der Thatsache, dass dem menschlichen Geiste nur die Verhältnissbestimmung der Grösse möglich ist, wurde es klar, dass der geometrische Mittelwerth den strengen Anforderungen Genüge leisten konnte; war es uns auch möglich, obwohl unter der Herbeiziehung einer zweiten Hypothese, die Gleichungen der Wohlgefälligkeitscurven herzuleiten und bestätigt zu finden. Die zweite Hypothese war ausserdem nur eine Verallgemeinerung der ersten und behält die erste Hypothese implicit in sich. Die Ableitung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der ästhetischen Fehler, welche die Grundlage einer zukünftigen psychischen Fehlerrechnung bilden kann, zeigte ein Resultat in einer vollkommenen Uebereinstimmung mit der Theorie.

Auch fürs Herz haben wir Wichtiges constatirt. Wie der Reiz des Schönen dahinfliehen kann, wenn wir ihn nicht durch Ruhe und Abwechselung, oft mit Aufopferung augenblicklichen Genusses, dauernd an uns zu fesseln wissen. Und möchten die mathematischen Formeln uns vor der Einseitigkeit gewarnt haben!

Vieles ist unvollkommen! Auch diese Arbeit. Wenn sie aber im Stande ist, ein höheres Interesse für das Schöne wachzurufen, wird ihre Veröffentlichung kein Fehler sein.

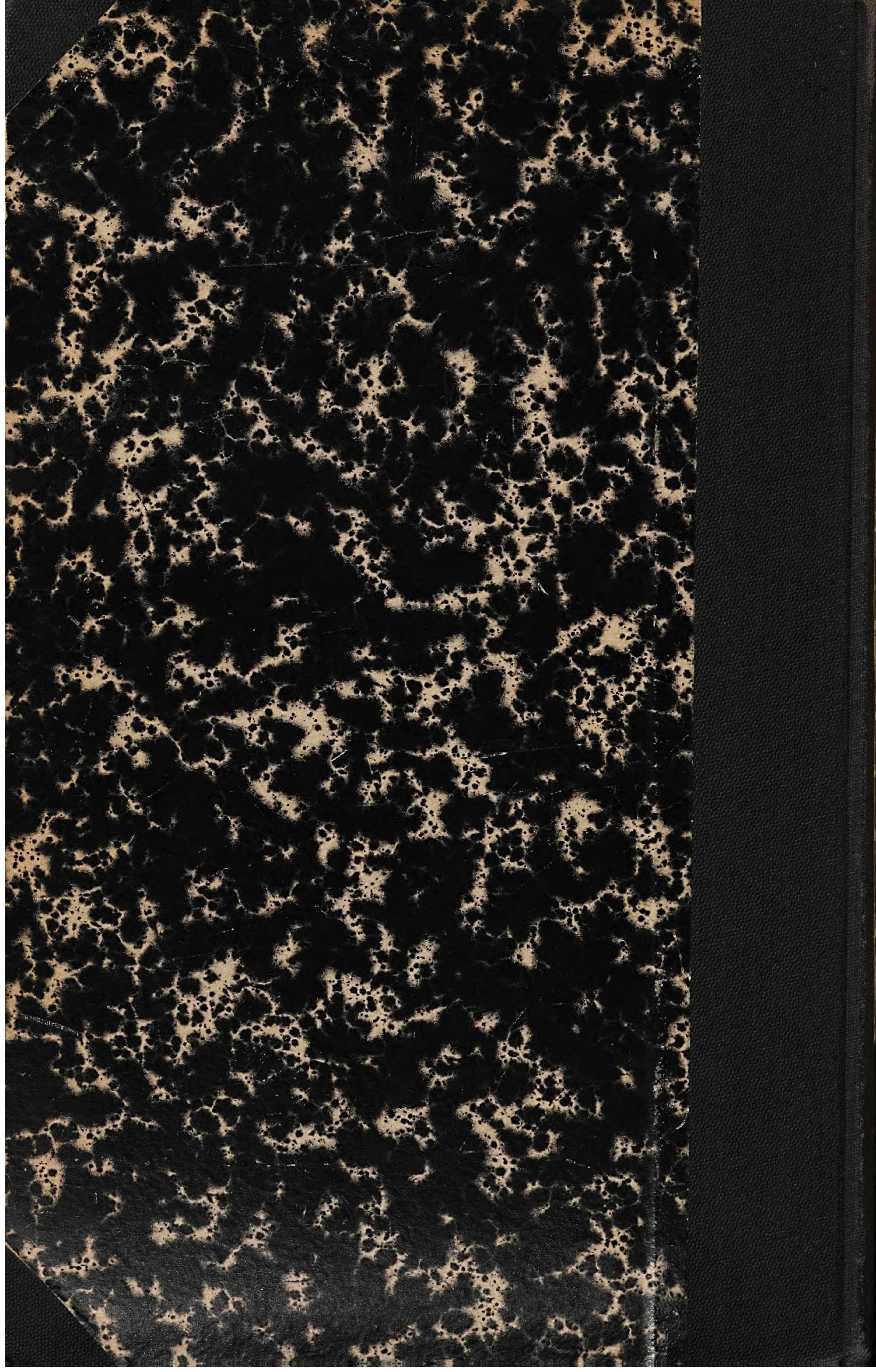
Tabelle
¹⁰
 der Functionen $\log x^x$ und x^x für $0 < x < 1$.

x	$\log x^x$	x^x	x	$\log x^x$	x^x
0,01	0,9800000—1	0,954992	0,38	0,8403178—1	0,692337
0,02	0,9660206—1	0,924742	0,39	0,8405152—1	0,692652
0,03	0,9543136—1	0,900147	0,40	0,8408240—1	0,693145
0,04	0,9440824—1	0,879189	0,41	0,8412414—1	0,693811
0,05	0,9349485—1	0,860892	0,42	0,8417647—1	0,694648
0,06	0,9266891—1	0,844674	0,43	0,8423914—1	0,695651
0,07	0,9191569—1	0,830151	0,44	0,8431192—1	0,696818
0,08	0,9122472—1	0,817047	0,45	0,8439456—1	0,698145
0,09	0,9058818—1	0,805159	0,46	0,8448686—1	0,699630
0,10	0,9000000—1	0,794328	0,47	0,8458860—1	0,701271
0,11	0,8945532—1	0,784428	0,48	0,8469958—1	0,703065
0,12	0,8895018—1	0,775357	0,49	0,8481961—1	0,705011
0,13	0,8848126—1	0,767030	0,50	0,8494850—1	0,707107
0,14	0,8804579—1	0,759378	0,51	0,8508608—1	0,709350
0,15	0,8764137—1	0,752339	0,52	0,8523218—1	0,711741
0,16	0,8726592—1	0,745863	0,53	0,8538662—1	0,714276
0,17	0,8691763—1	0,739906	0,54	0,8554926—1	0,716956
0,18	0,8659491—1	0,734428	0,55	0,8571995—1	0,719779
0,19	0,8629632—1	0,729396	0,56	0,8589853—1	0,722745
0,20	0,8602060—1	0,724780	0,57	0,8608487—1	0,725853
0,21	0,8576661—1	0,720553	0,58	0,8627882—1	0,729102
0,22	0,8553330—1	0,716693	0,59	0,8648027—1	0,732492
0,23	0,8531974—1	0,713177	0,60	0,8668908—1	0,736022
0,24	0,8512507—1	0,709986	0,61	0,8690512—1	0,739693
0,25	0,8494850—1	0,707107	0,62	0,8712828—1	0,743503
0,26	0,8478931—1	0,704520	0,63	0,8735845—1	0,747454
0,27	0,8464682—1	0,702212	0,64	0,8759552—1	0,751545
0,28	0,8452042—1	0,700171	0,65	0,8783937—1	0,755777
0,29	0,8440954—1	0,698386	0,66	0,8808990—1	0,760149
0,30	0,8431364—1	0,696845	0,67	0,8834701—1	0,764663
0,31	0,8423221—1	0,695540	0,68	0,8861061—1	0,769318
0,32	0,8416480—1	0,694461	0,69	0,8888059—1	0,774116
0,33	0,8411096—1	0,693601	0,70	0,8915686—1	0,779056
0,34	0,8407028—1	0,692952	0,71	0,8943934—1	0,784140
0,35	0,8404238—1	0,692506	0,72	0,8972794—1	0,789368
0,36	0,8402689—1	0,692259	0,73	0,9002257—1	0,794741
0,37	0,8402346—1	0,692205	0,74	0,9032315—1	0,800261

x	$\log x^x$	x^x	x	$\log x^x$	x^x
0,75	0,9062959—1	0,805927	0,88	0,9511447—1	0,893603
0,76	0,9094183—1	0,811743	0,89	0,9549571—1	0,901482
0,77	0,9125979—1	0,817707	0,90	0,9588183—1	0,909533
0,78	0,9158338—1	0,823823	0,91	0,9627277—1	0,917757
0,79	0,9191254—1	0,830090	0,92	0,9666848—1	0,926157
0,80	0,9224720—1	0,836512	0,93	0,9706891—1	0,934736
0,81	0,9258729—1	0,843088	0,94	0,9747402—1	0,943496
0,82	0,9293274—1	0,849821	0,95	0,9788374—1	0,952439
0,83	0,9328348—1	0,856712	0,96	0,9829804—1	0,961569
0,84	0,9363946—1	0,863763	0,97	0,9871686—1	0,970887
0,85	0,9400061—1	0,870976	0,98	0,9914016—1	0,980396
0,86	0,9436687—1	0,878352	0,99	0,9956788—1	0,990099
0,87	0,9473817—1	0,885894	1,00	0	1

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

DRUCK VON BREITKOPF & HÄRTEL IN LEIPZIG.



Helwig, Paul wan

Eine Theorie des Schönen

Amsterdam 1897

L.eleg.g. 184 i

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11813805-0